

(Diskrétní) Fourierova transformace

Obsah

Úvod	2
1 Fourierova transformace	3
1.1 Fourierova řada periodické funkce	3
1.2 Fourierova transformace	4
1.2.1 Základní vlastnosti	5
1.2.2 Příklady	7
1.2.3 Globální charakter transformace	8
1.2.4 Transformace náhodných procesů	8
1.2.5 Souvislost s Laplaceovou transformací	9
1.3 Diskrétní transformace	9
1.3.1 Maticové vyjádření transformace	11
1.4 Zobecnění pro dva rozměry	12
1.5 Fyzikální aplikace	13
1.5.1 Přenos soustavy	13
1.5.2 Difrakce	13
1.5.3 Reciproká mřížka	15
1.5.4 Zobrazení čočkou	16
1.5.5 Relace neurčitosti	16
1.6 Fourierova transformace ve zpracování obrazů	17
2 Rychlé algoritmy	17
2.1 Algoritmus Cooleyho a Tukeyho – redukce času	18
2.2 Algoritmus s redukcí kmitočtu	19
2.3 Sloučený algoritmus	19
2.4 Algoritmus FFT s prvočíselným rozkladem	19
2.5 Algoritmy v konečných okruzích	20
Seznam použité literatury	21
Seznam obrázků	
1 Vliv diskretizace na spektrum	10
2 Difrakce na čtvercovém a kruhovém otvoru	14
3 Optické schéma difrakční aparatury	15
4 Fourierova transformace čtverce 5×5 bodů – Mathematica	21

Úvod

V praxi je často výhodné (teoreticky i experimentálně) používat harmonických funkcí $\exp(i\omega t)$, neboť jsou snadno prakticky realizovatelné (resp. jejich imaginární či reálná část) a mají výhodné matematické vlastnosti (zvláště vzhledem k derivaci a integrování). Ukazuje se, že za dosti širokých podmínek lze každou funkci vyjádřit jako součet či integraci harmonických funkcí, ovšem každé s jinou vahou a fázovým posuvem (zpravidla jsou obě hodnoty zahrnuty do komplexní váhové funkce). Váhová funkce tedy udává, jaké frekvence ω je nutno použít v superpozici, aby bylo možno z harmonických funkcí zpětně sestavit původní funkci. Právě tato váhová funkce (**spektrum**) bývá označována jako (trigonometrická) **Fourierova transformace** (FT).

Definiční vzorec pro FT je integrálem a pro praktickou realizaci není příliš vhodný:

- jeho analytické řešení existuje jen v omezeném počtu případů a je nutno jej tedy řešit numericky (tedy přechodem nekonečný integrál \rightarrow konečná sumace),
- v případě počítačového zpracování nemáme spojitou funkci, ale jen její hodnoty v diskrétních vzorkovacích okamžicích.

Z těchto důvodů se definuje **diskrétní Fourierova transformace** (DFT), která je již polynomem a jejími vstupy a výstupy jsou posloupnosti hodnot. Nevýhodou této definice je její značná časová náročnost, která roste se čtvercem délky vstupní posloupnosti. Proto byl vypracován algoritmus, který vychází z vlastností exponenciálních diskrétních funkcí a výrazně snižuje potřebnou dobu výpočtu. Tento algoritmus je zvykem nazývat **rychlá Fourierova transformace** (FFT – *Fast Fourier Transform*).

Fourierova transformace se ukázala být účinnou metodou zpracování různých signálů. Často je využíváno její vlastnosti převodu konvoluce na násobení, což umožňuje u některých soustav zavést tzv. přenosovou (frekvenční) funkci, která vhodným způsobem charakterizuje dynamické vlastnosti soustavy. Metoda umožňuje provádět frekvenční filtraci, tedy odstraňovat ze signálu části s různými frekvencemi, což může např. snížit úroveň šumu v signálu. Operace ve frekvenční oblasti mohou upravovat obrazy takovým způsobem, aby např. došlo ke zvýraznění hran, k odstranění „proužkování“ či ke zvýraznění některých struktur v obraze.

Výrazným uplatněním FT je také skutečnost, že mnohé fyzikální jevy mohou být aproximovány právě Fourierovou transformací. V optice se jedná o jevy difrakce v tzv. Fraunhoferově aproximaci, zobrazení tenkou čočkou do ohniskové roviny a další. Zde umožňuje FFT výrazné zjednodušení práce, neboť není třeba sestavovat optické aparatury, ale stačí pouze použít kameru a nasnímat např. difrakční clonu. Tento způsob navíc umožňuje snadnou archivaci výsledků a další zpracování obrazu počítačem.

Teoreticky lze aparát Fourierovy transformace zobecnit tím, že nebudeme jako „bázové“ funkce uvažovat jen exponenciální funkce, ale libovolný systém funkcí, které splňují několik podmínek (především úplnost). Tyto **zobecněné Fourierovy transformace** mohou mít velmi různorodé vlastnosti, které lze využít v množství aplikací. Jako příklad tohoto zobecnění lze uvést např. vlnkovou transformaci, která využívá systém funkcí, odvozený od základní funkce pomocí posunutí a změny měřítka. V této transformaci dochází k transformaci jednorozměrného prostoru do dvourozměrného prostoru, který má tentýž fyzikální rozměr. Tímto se liší od Fourierovy transformace, která převádí např. prostor s fyzikálním rozměrem $[m]$ do prostoru $[m^{-1}]$.

1 Fourierova transformace

Fourierova transformace je matematická metoda, která je úspěšně použitelná k analyzování obrazů (signálů). V obecném případě se jedná o vyjádření funkce popisující obraz v jiných proměnných pomocí integrální transformace (v podstatě vyjádření funkce v jiné bázi). Ve speciálním případě se uvažuje tzv. **trigonometrická** Fourierova transformace, která za базové funkce pokládá $\sin(kt)$, $\cos(kt)$ nebo v komplexním tvaru $\exp(ikt)$, kde k je celé číslo v případě Fourierovy řady nebo reálná proměnná v případě Fourierovy transformace.

1.1 Fourierova řada periodické funkce

Nejjednodušší odvození Fourierovy transformace vychází z tzv. Fourierovy řady periodické funkce [1], jejíž motivaci lze nalézt ve skládání anizochronních harmonických kmitů téhož směru s takovými frekvencemi, aby výsledná funkce mohla být periodická, tedy $T_1 = nT_n$, kde n je celé číslo. Funkce daná touto superpozicí bude mít tvar

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_1 t), \quad (1)$$

kde A_n , B_n jsou koeficienty tvořící tzv. **spektrum** funkce $f(\cdot)$.

Koeficienty Fourierovy řady Nejprve budeme uvažovat funkci periodickou na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ a budeme předpokládat platnost výše uvedeného rozvoje pro nějakou kombinaci koeficientů A_n, B_n . Obě strany rovnosti vynásobíme funkcí $\sin(m\omega_1 t)$ a prointegrujeme přes interval délky $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} f(t) \sin(m\omega_1 t) dt &= B_0 \int_0^{T_1} \sin(m\omega_1 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{T_1} \sin(m\omega_1 t) \sin(n\omega_1 t) dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{T_1} \sin(m\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t) dt \end{aligned}$$

a využitím ortogonalit funkcí 1, \sin , \cos dostaneme

$$\int_0^{T_1} f(t) \sin(m\omega_1 t) dt = \frac{A_m T_1}{2}.$$

Podobně postupujeme při určení koeficientů B_n a tím získáme vztahy

$$A_m = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \sin(m\omega_1 t) dt, \quad (2)$$

$$B_m = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \cos(m\omega_1 t) dt, \quad (3)$$

$$B_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt. \quad (4)$$

Fourierovu řadu můžeme vyjádřit také v komplexním tvaru, vezmeme-li do úvahy Eulerovy vztahy pro funkce $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\exp(ix)$, jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega_1 t), \quad (5)$$

kde pro koeficienty C_n platí vztah

$$C_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) \exp(-in\omega_1 t) dt. \quad (6)$$

Podmínky platnosti rozvoje Vyjádření periodické funkce pomocí řady (1) je pouze formální. Není zaručeno, že limita posloupnosti částečných součtů této řady v bodě t_0 se bude skutečně rovnat $f(t_0)$. Lze pouze tvrdit: konverguje-li řada (1) stejnoměrně na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ k funkci $f(t)$, pak je tato funkce na intervalu spojitá a pro koeficienty A_n, B_n platí vztahy (2,3). (Je možno sestrotit funkce, jejichž Fourierova řada nekonverguje v žádném bodě.) Nás však zajímá opačný problém – kdy k funkci $f(t)$ existuje Fourierova řada. Aby bylo možno funkci $f(t)$ vyjádřit řadou, musí splňovat např. tzv. *Dirichletovy* podmínky:

1. $f(t)$ je na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ ohraničená,
2. $f(t)$ má na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ nejvýš konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu,
3. $f(t)$ má na intervalu $\langle 0, T_1 \rangle$ alespoň jednu z těchto vlastností:
 - (a) má konečný počet bodů ostrého lokálního extrému,
 - (b) je po částech monotónní,
 - (c) je po částech hladká.

Jestliže funkce $f(t)$ tyto podmínky splňuje, pak v každém bodě spojitosti ji lze rozvinout v řadu (1) tak, že je $f(t)$ součtem této řady a v každém bodě t_0 nespojitosti prvního druhu je součet této řady roven $\frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t))$. Dirichletovy podmínky jsou však pouze postačující, nikoliv nutné. Existují funkce, které tyto podmínky nespĺňují a přesto jim přiřazená Fourierova řada konverguje tak, že jejím součtem je rozvíjená funkce. Lze nalézt množství podmínek konvergence a také uvažovat více typů konvergenčí [1,2,4].

1.2 Fourierova transformace

Výraz pro Fourierovu transformaci můžeme odvodit z Fourierovy řady provedením limitního procesu $T_1 \rightarrow \infty$, tedy zvolením nekonečné doby periody, čímž umožníme využití této metody i pro signály, které nejsou periodické [1].

Dosadíme-li do řady (1) vzorce pro koeficienty (2,3), využitím základních trigonometrických vztahů (pro $\cos(\tau - t)$) dostaneme¹

$$f(\tau) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt + \frac{2}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1(\tau - t)) dt. \quad (7)$$

Budeme-li uvažovat pouze funkce absolutně integrovatelné na celé reálné ose ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$), pak první člen bude mít v limitě pro $T_1 \rightarrow \infty$ nulovou hodnotu. V druhém členu máme aritmetickou posloupnost $n\omega_1$ s konstantní diferencí ω_1 . Označíme-li $n\omega_1 = \omega$ a $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, dostaneme

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(\omega(\tau - t)) dt \right) \Delta\omega.$$

Výraz sumace vyjadřuje v limitě $T_1 \rightarrow \infty$ integrální součet a rovnice (7) přejde ve dvojný integrál

$$f(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega(\tau - t)) dt d\omega. \quad (8)$$

Dosadíme-li do (8) podle Eulerova vzorce za funkci \cos , dostaneme konečný výraz pro Fourierův integrál

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(\tau-t)} dt \right] d\omega. \quad (9)$$

¹Dále budeme uvažovat interval rozkladu funkce symetricky položený kolem nuly.

Tento vztah se dá zapsat v symetrickém tvaru jako

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Výraz uvnitř hranaté závorky považujeme za Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ a zbylá část vztahu udává inverzní Fourierovu transformaci :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad (10)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}. \quad (11)$$

Podmínky existence obrazu Při odvozování (limitním přechodu) Fourierova integrálu byly použity předpoklady o integrovatelnosti funkce $f(t)$ a o její rozvinutelnosti ve Fourierovu řadu na každém intervalu $\langle a, b \rangle$ (tedy vyhovuje Dirichletovým podmínkám), přičemž se předpokládalo, že integrál vyjadřuje funkci $f(t)$ ve všech bodech spojitosti. Fourierova transformace však může existovat i k funkcím, které tyto podmínky nespĺňují. Navíc je možno definovat Fourierovy obrazy i k distribucím; tyto však nemusí splňovat některé dále uvedené vlastnosti (např. $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \text{const.}$, což nespĺňuje podmínku nulovosti pro $\omega \rightarrow \infty$).

Poznámka: V literatuře je možno najít více definic transformace, které se liší koeficientem 2π . Dříve uvedený vztah je v symetrizovaném tvaru, ale je možno přiřadit buď celou hodnotu 2π jednomu z integrálů (u druhého nebude žádná konstanta), nebo 2π přesunout do exponentu integrandu (pak jsou bez konstant oba integrály). Rozdíly v definicích se mohou promítnout do dalších vztahů (např. Parsevalovy věty).

1.2.1 Základní vlastnosti

Pro praktické využití Fourierovy transformace jsou důležité její následující vlastnosti [1,9]:

Linearita Z vlastností integrálu plyne vztah

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\}$$

pro libovolné a, b (i komplexní), z čehož plyne linearita Fourierovy transformace.

Změna měřítka a posun v čase Je-li v argumentu funkce $f(t)$ provedena změna měřítka, pak platí (pro $a \neq 0$)

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Provedeme-li v argumentu posunutí τ , pak pro obraz platí

$$\mathcal{F}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \times e^{-i\omega\tau}.$$

Modulační věta Je-li posunutí τ provedeno ve spektrální oblasti, pak platí

$$F(\omega - \tau) = \mathcal{F}\{f(t)e^{i\tau t}\},$$

tedy posunutí se projeví modulací.

Dualita transformace Pro dvojnásobné užití Fourierovy transformace platí

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-\omega),$$

kde je nutno po provedení první transformace formálně zaměnit ω za t .

Derivace originálu Má-li funkce $f(t)$ na každém intervalu konečné délky derivaci ve smyslu absolutně spojitě funkce $f'(t)$ a obě tyto funkce jsou lebesgueovsky integrovatelné (popř. obě v kvadrátu) na intervalu $\langle -\infty, \infty \rangle$, pak platí

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\},$$

tedy operace derivování v originálu přechází na násobení v obraze. Opětovným použitím lze odvodit vztah i pro vyšší derivace (n -tého řádu), v němž je výraz $i\omega$ nahrazen $(i\omega)^n$.

Derivování obrazu Necht' jsou funkce $f(t)$ a $tf(t)$ lebesgueovsky integrovatelné (popř. obě v kvadrátu), pak platí

$$\mathcal{F}\{tf(t)\} = i(\mathcal{F}\{f(t)\})',$$

tedy derivování obrazu přechází v násobení originálu t . Obdobně pro vyšší řády derivace se vyskytnou vztahy $i^n, t^n f(t)$.

Integrace originálu Existují-li Fourierovy transformace funkcí $f(t)$, $\int f(t) dt$, pak

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}\{f(t)\},$$

tedy integrace v obraze přejde v dělení výrazem $i\omega$, pro n -násobnou integraci se vyskytuje násobení $(i\omega)^n$.

Obraz reálné funkce Je-li funkce $f(t)$ reálná a jestliže k ní existuje její Fourierův obraz $F(\omega)$, pak platí pro komplexní sdružení

$$F(\omega) = F^*(-\omega).$$

Obraz konvoluce a součinu Necht' jsou funkce $f(t)$, $g(t)$ integrovatelné na intervalu $(-\infty, \infty)$, pak pro obraz konvoluce těchto funkcí platí

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau\right\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \times \mathcal{F}\{g(t)\},$$

tedy konvoluce originálů je ekvivalentní násobení obrazů. Obdobně pro součin funkcí $f(t)g(t)$ platí

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)G(\omega-\tau) d\tau.$$

Parsevalova věta Je-li $f(t)$ absolutně integrovatelná a omezená pro skoro všechna t , pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Limitní vlastnosti Je-li $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, pak pro Fourierův obraz $F(\omega)$ platí

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = 0.$$

Periodizace funkce Mějme funkci $f(t)$ a vytvořme z ní periodickou funkci $\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_1)$. Pro obraz této funkce platí

$$\mathcal{F}\{\tilde{f}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t-nT_1)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f(t)\}e^{-2\pi i\nu nT_1}.$$

Použijeme-li vztahu

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\nu ij} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(j-i),$$

kde $\delta(\cdot)$ je Diracova distribuce, dostaneme výsledný vztah

$$\mathcal{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - nT_1),$$

tedy výsledkem periodizace originálu je diskretizace jeho spektra (tato vlastnost plyne i ze způsobu odvození Fourierovy transformace z Fourierovy řady). Popsaný způsob umožňuje vůbec formálně zavést Fourierův obraz periodické funkce, neboť periodická funkce nemůže splňovat podmínku absolutní integrovatelnosti.

Vztah platí i obráceně, diskretizací originálu získáme periodické spektrum (tvořené posloupností δ -funkcí).

Princip neurčitosti Uvažujme funkci $f(t)$ se spojitou derivací (pro jednoduchost) a nulovou pro dostatečně vysoké abs. hodnoty t . Disperze této funkce vzhledem k bodu a je dána vztahem $D_f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-a)^2 |f(t)|^2 dt$. Hodnotu a , pro kterou je $D_f(a)$ minimální, nazýváme střední argument funkce f . Nechť dále je b střední argument Fourierovy transformace funkce $f(t)$ a předpokládejme $a = b = 0$. Uvažujme funkci parametru τ

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t) + \tau f'(t)|^2 dt,$$

kteřou rozepsáním, integrací *per partes* a použitím Parsevalovy rovnosti pro $f'(t)$ upravíme do tvaru

$$I(\tau) = D_f(0) - \tau \|f\|^2 + \tau^2 D_F(0) \geq 0.$$

Diskriminant tohoto výrazu musí být nekladný:

$$\|f\|^4 - 4D_f(0)D_F(0) \leq 0,$$

z čehož plyne pro normovanou funkci $f(t)$

$$D_f(0)D_F(0) \geq \frac{1}{4}, \quad (12)$$

vyjádřeno slovně : čím více je funkce $f(t)$ soustředěna kolem středního argumentu, tím méně je soustředěna okolo svého středního argumentu její Fourierova transformace $F(\omega)$.

1.2.2 Příklady

Pro ilustraci charakteru Fourierovy transformace bude v tomto oddíle uvedeno pár příkladů (bez průběžných výpočtů).

Diracova δ -funkce Hledejme obraz funkce, která vytváří nekonečně tenký impuls, který má ovšem konečnou plochu (správněji bychom měli uvažovat distribuci). Takováto funkce má definiční předpis $\delta(0) = \infty$ a $\delta(t) = 0$ pro $t \neq 0$, přičemž platí $\int_L \delta(t)f(t) dt = f(0)$, kde $f(\cdot)$ je libovolná funkce a integrační interval L obsahuje bod $t = 0$. Fourierovu transformaci δ -funkce můžeme lehce spočítat z uvedeného integrálního vztahu:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad \text{Obraz } \delta\text{-funkce}$$

Výsledek lze interpretovat tak, že přesně lokalizovaný impuls je rozprostřen v celé frekvenční oblasti. To má závažný důsledek v tom, že frekvenční filtrace je nevhodná k odstraňování impulsního šumu.

Konstantní funkce K analýze spektra konstantní funkce využijeme předchozí výsledek a sudost δ -funkce, dualitu a linearitu transformace a rozepsání funkce $f(t) = konst. = k = k \cdot 1$. Jednoduchý výpočet dává

$$\mathcal{F}\{k\} = k\mathcal{F}\{1\} = \sqrt{2\pi}k\delta(\omega). \quad \text{Obraz konstanty}$$

Jednotkový skok Důležitou (teoretickou) funkcí v mnoha oblastech je jednotkový skok s předpisem $\eta(t) = 0$ pro $t \leq 0$ a $\eta(t) = 1$ pro $t > 0$, který např. umožňuje stanovovat odezvy systémů při přechodových jevech (připojení stejnosměrného napětí apod.). Jeho Fourierovu transformaci lze odvodit přímo z definičního vzorce nebo z poznatku, že pro skok platí $\eta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ a tedy z vlastnosti o integraci originálu plyne

$$\mathcal{F}\{\eta(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{i\omega} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}\omega}. \quad \text{Obraz jednotkového skoku}$$

Gaussova funkce Pro modelování z oblasti pravděpodobnosti i jiných má velký význam Gaussova funkce $\gamma(t) = e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}$, kde $\sigma > 0$ je parametr určující „šířku“ funkce. Stanovení jejího obrazu provedeme z definičního vztahu, v němž obě exponenciály sloučíme a exponenty převedeme na součet čtverce a části nezávislé na t a využijeme vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = \sqrt{\pi}\sigma$. Tedy lze psát

$$\mathcal{F}\{\gamma(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{i\omega\sigma}{2}\right)^2} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}, \quad \text{Obraz Gaussovy funkce}$$

z čehož je vidět, že tvar funkce se zachová, ale šířky originálu a obrazu jsou si (v souladu s principem neurčitosti) nepřímě úměrné.

1.2.3 Globální charakter transformace

Při studiu vlastností Fourierovy transformace nelze zapomenout na její globální charakter. V transformovaném obraze se projevující periodické jevy, což jsou charakteristiky „rozmáznuté“ přes celý originál, budou „stlačeny“ do jediného frekvenčního bodu. Fourierova analýza má ovšem význam, pokud jsou tyto periody přítomny v celém definičním oboru. Uvažujme např. tyto dvě funkce, obsahující stejné „tvořící“ funkce:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin t + \sin 2t, \\ f_2(t) &= \begin{cases} \sin t & t < 0, \\ \sin 2t & t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

V první funkci jsou obě frekvence zastoupeny v celém def. oboru a ve spektru se objeví dvě složky tak, jak bychom očekávali. Ve druhém případě jsou frekvence zastoupeny jen v polovině def. oboru a výsledné Fourierovo spektrum neposkytuje jasný obraz o zastoupených frekvencích. V tomto případě by bylo výhodnější použít okénkovou transformaci, která by pracovala pouze s částí obrazu — jednou polovinou.

1.2.4 Transformace náhodných procesů

Prozatím jsme vždy uvažovali funkci $f(t)$, která byla deterministická – její hodnoty bylo možno kdykoliv předem určit. Fourierovou transformací jsme k ní určili její spektrum (obraz) $F(\omega)$, které je obecně komplexní funkcí a dá se tedy rozepsat na **amplitudové** spektrum $|F(\omega)|$ a **fázové** spektrum $\arg F(\omega)$. Tato transformace byla vzájemně jednoznačná, tedy spektru bylo možno přiřadit zpětně původní funkci.

Uvažujeme-li náhodný proces, máme k dispozici vždy jen několik jeho konkrétních realizací (dále uvažujeme jen jednu – $f(t)$). K této realizaci můžeme sice sestrojít Fourierův obraz, nicméně tento by necharakterizoval náhodný proces, protože zpětnou transformací bychom dostávali stále tutéž funkci – odstranila by se náhodnost. K popisu náhodných procesů je proto nutno zavést jiné charakteristiky. Používá se tzv. (jednostranná) **spektrální výkonová hustota** $\mathcal{G}(\omega)$ [6], která se stanovuje měřením výkonu signálu, který je omezen frekvenčně na úzké pásmo $\langle \omega, \omega + \Delta\omega \rangle$ a časově na dobu T_0

$$\mathcal{G}(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\omega} \left[\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f_{T_0}^2(\omega, \Delta\omega) dt \right]. \quad (13)$$

Tato charakteristika je určena čtvercem amplitudového spektra, tedy ztrácíme informaci o fázi signálu a tím i **jednoznačnost** transformace. Navíc touto cestou získáváme pouze odhad výkonového spektra, protože spektra stanovená ze dvou různých realizací téhož náhodného procesu budou sice podobná, ale obecně různá. Výkonové spektrum lze samozřejmě zavést i u deterministického signálu, ale u něj představuje zbytečnou ztrátu informace. Náhodnými procesy se dále zabývat nebudeme.

1.2.5 Souvislost s Laplaceovou transformací

Uvažujme funkci jednotkového skoku $f(t) = 1$ pro $t \geq 0$, $f(t) = 0$ pro $t < 0$. Tato funkce není absolutně integrovatelná a nelze k ní přímo z definičního vztahu nalézt Fourierův obraz. Lze však nalézt obraz k funkci $\exp(-at)$ pro libovolné kladné a a $t \geq 0$. Budeme-li limitovat $a \rightarrow 0$, dostaneme z této funkce jednotkový skok. Provedeme-li limitní proces i v obraze, můžeme jej tedy považovat za Fourierův obraz jednotkového skoku. Podobný proces je nutno provádět i u jiných funkcí, nabízí se tedy možnost zavést přímo transformaci, která by již v sobě zahrnovala násobení klesající exponenciálou. Taková transformace se nazývá (jednostranná) *Laplaceova* transformace a je definována pro všechny funkce nulové v záporných časech vztahem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (14)$$

kde p je komplexní číslo odpovídající ω ve Fourierově transformaci. Inverzní transformace je definována vztahem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp, \quad (15)$$

kde a je pouze „integrační parametr“, na jehož hodnotě nezáleží. Je vidět, že Fourierův obraz funkce lze dostat z Laplaceova obrazu (za jistých předpokladů) záměnou $p \rightarrow \omega$.

1.3 Diskrétní transformace

V případě počítačového zpracování signálů máme k dispozici vždy jen vzorky funkce $f(t)$ v diskrétních časových okamžicích (tyto tvoří originální posloupnost $\{f_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$). Zavádíme tedy tzv. *diskrétní Fourierovu transformaci*, kterou dostaneme formálním nahrazením integrálu integrálním součtem s dělením odpovídajícím periodě vzorkování T_1 (zpravidla se volí ekvidistantní okamžiky). Definiční vztah pro diskrétní Fourierovu transformaci tedy je [6,9]

$$F_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i e^{-i2\pi k i T_1}, \quad (16)$$

kde $\{F_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ je obrazová posloupnost. Nemůžeme však hovořit o Fourierově transformaci posloupnosti, ale pouze funkce. Abychom odvodili vztah (16), budeme vzorkovat spojitou funkci $f(t)$ (platí $f(iT_1) = f_i$) posloupností δ -funkcí a na tuto funkci uplatníme spojitou Fourierovu transformaci:

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(iT_1) \delta(t - iT_1) \\ \hat{F}(\nu) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(iT_1) e^{-i2\pi \nu i T_1} \end{aligned}$$

a ve funkci \hat{F} provedeme vzorkování, neboť diskrétní signál může být vyjádřen spočetnou bází.

Pro praxi má větší význam tzv. konečná diskrétní Fourierova transformace, u níž sumace probíhá pouze v mezích od 0 do $N-1$, kde N je počet vzorků. Základní vztah pro diskrétní konečnou transformaci tedy je

$$F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-i2\pi \frac{ki}{N}} \quad (17)$$

a symbolicky ji označíme jako

$$\{F_k\}_{k=0}^{N-1} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}_N}\{f(i)\}.$$

Podle vztahu (17) můžeme určit jen N různých hodnot spektra, neboť exponenciální funkce je periodická s periodou N . Výsledkem transformace je tedy buď N -členná posloupnost nebo periodická nekonečná posloupnost. Inverzní diskretní Fourierova transformace je dána vztahem

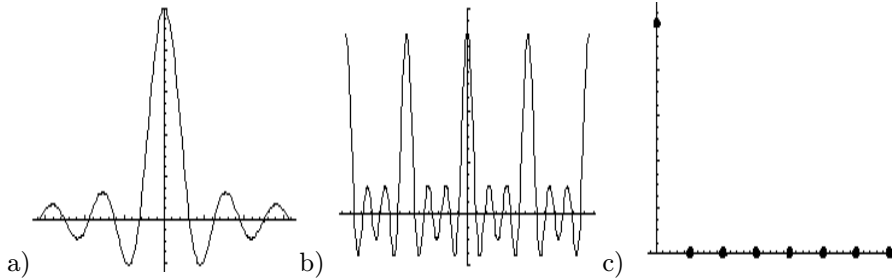
$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi \frac{ki}{N}}, \quad (18)$$

což lze dokázat dosazením z (17).

Poznámka 1: Aby byla zaručena rozměrová správnost, měla by ve vzorcích (17,18) být i vzorkovací perioda T_1 (z přechodu $dt \rightarrow T_1$). Ve většině literatury se však tato konstanta vynechává.

Poznámka 2: Spektra jsou rozdílná, nahlížíme-li na f_i jako na posloupnost N vzorků nebo jako na „spojitou“ funkci definovanou pro všechny časy t a nulovou mimo okamžiky iT_1 . V prvním případě má spektrum pouze N složek, ve druhém nekonečně mnoho, ale prvních N složek je (až na násobek) shodných s prvním případem.

Poznámka 3: Vliv diskretizace na tvar spektra budeme demonstrovat na obdélníkové funkci, která je jednotková v intervalu $\langle -T_1/2, T_1/2 \rangle$, jinde nulová. Budeme-li počítat spojitou transformaci této spojitě funkce, dostaneme tvar $\frac{\sin \omega}{\omega}$ (viz obr. 1a)). Budeme-li obdélníkovou funkci diskretizovat a uplatníme na ni spojitou transformaci, dostaneme tvar $\frac{\sin[(2N+1)\omega]}{\sin \omega}$, kde N je počet vzorků (viz obr. 1b)). Tato funkce již je periodická s periodou 2π a je zřejmé, že tím dochází ke zkreslení spektra (vzhledem ke spojitě funkci). Provedeme-li z diskretizované obdélníkové funkce (s počtem vzorků N) diskretní transformaci (také N -prvkovou), dostaneme obr. 1c). Tato funkce má jedinou nenulovou hodnotu pro $i = 0$. Je to dáno tím, že volba počtu „kroků“ diskretizace a transformace je taková, že není možno odlišit, zda-li transformujeme obdélníkovou funkci nebo funkci jednotkovou na celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Aby se objevila maxima a minima jako v předchozích případech, je třeba provést diskretizaci i transformaci např. s $2N$ vzorky (při zachování periody vzorkování). I v tomto případě bude spektrum zkresleno periodizací. Aby byl vliv periodizace malý, muselo by spojitě spektrum spojitě funkce od maxima rychle klesat k nule.



Obrázek 1: Vliv diskretizace na spektrum.

Většina vlastností spojitě transformace je platná i pro diskretní transformaci, jen je nutno nahradit příslušné integrály sumacemi a posunutí musí odpovídat vzorkovacím okamžikům.

Např. místo věty o obrazu derivace platí věta o obrazu diference :

$$F'_k = \sum_{i=0}^{N-1} (f_i - f_{i-1}) e^{-i2\pi \frac{ki}{N}} = (1 - e^{i2\pi \frac{k}{N}}) F_k.$$

Pro konečné posloupnosti signálu uvedeme ještě některé další vlastnosti [5].

Doplnění nulami Potřebujeme-li ze signálu s N vzorky signál o délce rN , kde r je celé číslo, můžeme signál doplnit nulami (vznikne posloupnost f'_i). Pro Fourierovu transformaci upraveného signálu platí

$$F'_k = \sum_{i=0}^{rN-1} f'_i e^{-i2\pi \frac{ki}{rN}} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-i2\pi \frac{ki}{rN}} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-i2\pi \frac{k_i}{N}}.$$

Je-li k dělitelné r , pak je mezi spektry souvislost

$$F'_k = F_{\frac{k}{r}},$$

není-li dělitelné, je souvislost pouze přes původní posloupnost.

Opakování Signál můžeme prodloužit také postupným opakováním r -krát všech hodnot. Pro transformaci takového signálu \tilde{f}_i pak platí

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{D}_N}\{\tilde{f}_i\} &= \sum_{i=0}^{rN-1} \tilde{f}_i e^{-i2\pi \frac{ki}{rN}} = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \sum_{j=0}^{r-1} e^{-i2\pi \frac{(i+jN)k}{rN}} = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-i2\pi \frac{ik}{rN}} \sum_{j=0}^{r-1} e^{-i2\pi \frac{jNk}{rN}}. \end{aligned}$$

Druhá sumace je rovna r nebo 0 , když je nebo není k dělitelné r , tedy mezi spektry signálů f_i a \tilde{f}_i platí

$$\tilde{F}_k = \begin{cases} rF(\frac{k}{r}) & \text{pro } k \text{ dělitelná } r \\ 0 & \text{pro ostatní } 0 \leq k \leq rN - 1 \end{cases}.$$

Zředění r -krát zředěnou posloupností budeme rozumět posloupnost, ve které je za každý člen (původní posloupnosti) vloženo $p - 1$ nul, tedy platí

$$g_i = \begin{cases} f_j & \text{pro } i = rj \\ 0 & \text{pro } i \neq rj \end{cases} \quad j = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Pro obraz $\{G_k\}$ dostáváme

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{i=0}^{rN-1} g_i e^{-i2\pi \frac{ik}{rN}} = \sum_{j=0}^{N-1} g_{rj} e^{-i2\pi \frac{jrk}{rN}} = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, rN - 1, \end{aligned}$$

což znamená, že obrazem p -krát zředěné posloupnosti je p -krát opakovaná posloupnost.

Parsevalova věta V diskrétní verzi má tato věta pro reálnou vstupní posloupnost tvar

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2.$$

1.3.1 Maticové vyjádření transformace

Vytvoříme ze vstupních hodnot f_i sloupcový vektor tvaru $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})^T$ (označuje transpozici matice), z transformovaných hodnot F_k vytvoříme vektor ${}^T F = (F_0, F_1, \dots, F_{N-1})$. Pak můžeme Fourierovu diskrétní transformaci vyjádřit ve tvaru [5]

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma} \mathbf{f},$$

kde Σ je čtvercová matice transformace řádu N

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^0 & \sigma^0 & \sigma^0 & \dots & \sigma^0 \\ \sigma^0 & \sigma^1 & \sigma^2 & \dots & \sigma^{N-1} \\ \sigma^0 & \sigma^2 & \sigma^4 & \dots & \sigma^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^0 & \sigma^{N-1} & \sigma^{2(N-1)} & \dots & \sigma^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

σ je N -tý primitivní kořen jednotky, tedy $\sigma = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. Inverzní Fourierovu transformaci lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{f} = \Sigma^{-1}\mathbf{F},$$

kde Σ^{-1} je matice inverzní k Σ a je dána vztahem $\Sigma^{-1} = \frac{1}{N}\Sigma^*$. Z vlastností matice Σ uveďme alespoň regulárnost a symetričnost ${}^T\Sigma = \Sigma$, ${}^T(\Sigma^{-1}) = \Sigma^{-1}$ a unitárnost $({}^T\Sigma)^* = \frac{1}{N}\Sigma^{-1}$. Charakteristická čísla dané matice jsou \sqrt{N} , $-\sqrt{N}$, $-i\sqrt{N}$, $i\sqrt{N}$, ovšem každé s jinou násobností závisující na řádu matice.

1.4 Zobecnění pro dva rozměry

Dvourozměrnou Fourierovu transformaci můžeme definovat v bázi z funkcí $\exp[-i(kx + ly)]$ tak, aby zůstaly zachovány vlastnosti platné pro jednoduchou transformaci. Definujeme tedy:

$$F(\zeta, \xi) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\zeta + y\xi)} dx dy, \quad (19)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, \xi) e^{i(x\zeta + y\xi)} d\zeta d\xi. \quad (20)$$

Pro diskrétní (konečnou) verzi budeme transformaci definovat vztahem

$$F_{k,l} = \sum_{i=0}^{N_1-1} \sum_{j=0}^{N_2-1} f_{i,j} e^{-i2\pi(\frac{ik}{N_1} + \frac{j l}{N_2})}. \quad (21)$$

Tuto transformaci můžeme zapsat také ve tvaru

$$F_{k,l} = \sum_{i=0}^{N_1-1} \left[\sum_{j=0}^{N_2-1} f_{i,j} e^{-i2\pi\frac{j l}{N_2}} \right] e^{-i2\pi\frac{ik}{N_1}}, \quad (22)$$

což je v podstatě zápis dvou jednorozměrných transformací, nejprve transformace provedené „po sloupcích“ a poté „po řádcích“ a samozřejmě lze pořadí výpočtu přehodit.

Vlastnosti této transformace jsou shodné s vlastnostmi jednorozměrné po případné záměně operací jednorozměrných dvourozměrnými (např. dvourozměrná konvoluce, ...). Jako další vlastnosti uvedeme :

1. Lze-li psát $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, pak je možno psát také transformovanou funkci ve tvaru $F(\zeta, \xi) = F_1(\zeta)F_2(\xi)$, pokud ovšem všechny obrazy existují.
2. Obraz kruhově symetrické funkce je také kruhově symetrický.

Posunutí Z definice diskrétní Fourierovy transformace vyplývá, že transformace obdélníku bude periodickou funkcí, která bude maximálních hodnot nabývat v rozích. Naproti tomu difrakce na obdélníku (viz dále) bude mít maximum uprostřed. Tento rozdíl je dán definicí (17), v níž sumace probíhá od 0 do $N - 1$, zatímco „fyzikálně“ by vyhovovala sumace od $-N/2$ do $N/2$. K zajištění shody obou obrazů je možno spočtený obraz posunout o polovinu periody podél obou os (počítačově lze realizovat prohozením jednotlivých čtvrtin). Toto posunutí je možno provést, protože transformace je periodická, viz obr. 4, kde je vykreslen² kvadrát modulu transformace čtverce 5×5 bodů, u něhož je $f_{i,j}$ rovno nule mimo čtverec

²Pro lepší názornost je výstup vykreslen jako funkce *spojitých* argumentů k, l , ale smysl mají samozřejmě pouze body příslušné celočíselným k, l .

a jedné uvnitř čtverce (velikost celého obrazu je 512×512 bodů). Pro tento obrazec má Fourierův obraz tvar

$$F_{k,l} = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 e^{i2\pi \frac{ki+jl}{512}}.$$

Na horním obrázku je jedna perioda transformace s maximy v rozích, na spodním dvě periody v obou směrech. Je vidět, že posunutím o půl periody podél obou os dosáhneme vystředění maxima.

1.5 Fyzikální aplikace

Fourierova transformace má ve fyzice četná využití, a to jak v experimentální, tak i v teoretické. V teoretické fyzice jde především o metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, např. řešení takovéto lineární rovnice jen pro monochromatické funkce a výsledná funkce řešící daný problém (s poč. a okrajovými podmínkami) se vytvoří (váženou) sumací řešení monochromatických.

V následujícím textu bude ukázáno několik příkladů využití transformace ve fyzice.

1.5.1 Přenos soustavy

Mějme lineární soustavu, na jejíž vstup působí funkce $f(t)$, která vyvolá na výstupu reakci $g(t)$. Jelikož je soustava lineární, je výstupní funkce váženou superpozicí vstupní funkce v různých časech τ [7]

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

kde $h(t, \tau)$ je váhovou funkcí. Budeme-li uvažovat soustavu časově invariantní, musí platit $h(t, \tau) = h(t-\tau)$ a pravá strana předešlé rovnice se stane konvolucí. Využijeme-li Fourierovy transformace a konvolučního teorému, dostaneme jednoduchý vztah

$$G(\omega) = H(\omega)F(\omega),$$

kde $H(\omega)$ je **přenosová funkce soustavy**.

Význam zavedení přenosových funkcí je v tom, že umožňují jednoduché stanovení přenosu celé sestavy, známe-li přenosy jednotlivých prvků (bez zavedení přenosů by bylo nutno pracovat s diferenciálními rovnicemi). Např. sériové spojení dvou prvků s přenosy $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ má výsledný přenos $H_s(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$ a paralelní spojení $H_p(\omega) = H_1(\omega) + H_2(\omega)$.

1.5.2 Difrakce

Vyjděme z Helmholtzovy rovnice pro (bezčasovou) vlnovou funkci ψ a řešme ji pomocí Greenovy integrální věty tak, že napíšeme tutéž rovnici pro funkci $\psi_0 = \frac{\exp(-i\kappa r)}{r}$, vynásobíme ji ψ a odečteme od první rovnice násobené ψ_0 , čímž dostaneme $\psi\Delta\psi_0 - \psi_0\Delta\psi = 0$ a aplikací Greenovy věty dostaneme

$$\oint_S (\psi \text{grad } \psi_0 - \psi_0 \text{grad } \psi) d\vec{S} = 0.$$

Provedeme-li integraci tak, že kolem bodu r_0 opišeme malou kouli a integrál přes plochu S rozdělíme na dva, vyčíslíme hodnoty a poté budeme zmenšovat poloměr koule k nule, dostaneme tzv. *Kirchhoffův integrální vzorec*

$$\psi(R) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{\exp(-i\kappa r)}{r} \text{grad } \psi - \psi \text{grad } \frac{\exp(-i\kappa r)}{r} \right) d\vec{S}. \quad (23)$$

Pro vypočítání integrálu rozdělíme int. plochu na tři části : plochu stínítka, plochu otvoru a kulovou plochu s poloměrem hodně velkým. Budeme předpokládat, že na ploše otvoru se hodnoty ψ a gradientu liší jen zanedbatelně od stavu bez stínítka, a že na ploše stínítka a kulové plochy je $\psi = \text{grad } \psi = 0$.

Budeme-li dále předpokládat, že vzdálenost zdroje a bodu pozorování od bodu stínítka jsou $r_0 \gg \lambda, r \gg \lambda$, dostaneme pro bodový zdroj světla tzv. *Fresnelův–Kirchhoffův difrakční vzorec*:

$$\psi(R) = \frac{iA}{2\lambda} \int_S \frac{e^{-i\kappa(r+r_0)}}{rr_0} \left[\cos(\vec{r}, \vec{S}) - \cos(\vec{r}_0, \vec{S}) \right] dS, \quad (24)$$

kde $\cos(\cdot, \cdot)$ je kosinus úhlu mezi vektory. Mění-li se člen $[\cdot]$ jen málo (je přibližně $\cos \tau$) a vzdálenosti r, r_0 lze nahradit vzdálenostmi od počátku souřadnic (v ploše otvoru), dostaneme z (24)

$$\psi(R) = \frac{iA \cos(\tau)}{RR_0\lambda} \int_S e^{-i\kappa(r+r_0)} dS.$$

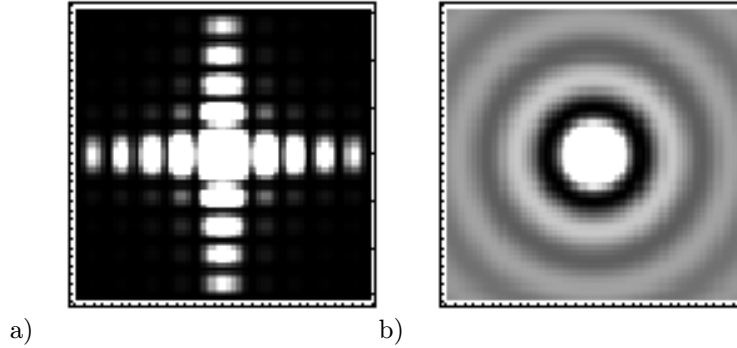
Rozvineme-li vzdálenosti r_0, r v řadu a zanedbáme-li členy vyšších řádů než lineární (což lze provést, vzhledem k periodicitě funkce $\exp(x)$, jen tehdy, jsou-li nelineární členy mnohem menší než 2π), dostaneme vzorec ve tvaru

$$\psi(R) = B \int_S e^{-i\kappa(\zeta x + \xi y)} dS,$$

kde ζ, ξ jsou směrové kosíny polohového vektoru bodu R k osám x, y . Zavedeme-li funkci amplitudové propustnosti $\Gamma(x, y)$, která je jednotková v bodech otvoru a nulová mimo něj, můžeme rozšířit integraci přes celý prostor a výsledná vlna je úměrná dvourozměrné Fourierově transformaci funkce propustnosti³:

$$\psi(R) = \psi(\zeta', \xi') \sim \mathcal{F}\{\Gamma(x, y)\}; \quad (25)$$

pro čtvercový a kruhový otvor je difrakční obrazec vykreslen na obr. 2.



Obrázek 2: Difrakce na čtvercovém a kruhovém otvoru.

Je však nutno upozornit, že daná metoda uvažuje pouze skalární funkci, zatímco elektromagnetické pole má vektorový charakter, čímž se dopouští dalšího zjednodušení.

Poznámka 1: Možnost zanedbání členů vyšších než lineárních nastává tehdy, jsou-li R, R_0 „nekonečné“ (lze zajistit použitím čočky se zdrojem v ohnisku), nebo platí-li $R = -R_0$ (tedy i při konečných vzdálenostech). Poslední podmínka vychází z úvahy, že při rozvoji funkce v Taylorovu řadu absolutní hodnoty jednotlivých členů s rostoucí mocninou argumentu klesají. Předpokládá se, že tato vlastnost zůstává přibližně zachována i při nulovém kvadratickém členu.

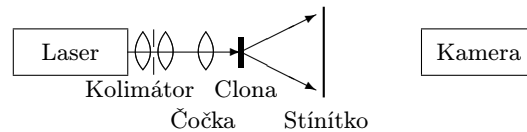
Poznámka 2: Předpoklad nulovosti funkce ψ a grad ψ na ploše konečné velikosti je matematicky nesprávný, neboť takováto funkce by musela být nulová v celém prostoru. Nicméně fyzikálně tato aproximace vyhovuje.

³Odlíšnost exponentu oproti definici (19) v předešlém vzorci nemá na vyjádření podstatný vliv, κ je zahrnuto do čárkovaných proměnných.

Poznámka 3: Při difrakčních jevech s pouze absorpčními stínítky se hlavní maxima nacházejí vždy uprostřed. Je to možno demonstrovat tím, že vzorec pro Fourierovu transformaci je ve své podstatě spojitým skládáním komplexních vektorů, jejichž směr určuje jednotkový člen $e^{i\kappa(\zeta x + \xi y)}$, násobený nulovou nebo jednotkovou velikostí. Takový součet nabývá největší hodnoty tehdy, jsou-li vektory skládány podél přímky, tedy pro $\zeta = \xi = 0$.

Poznámka 4: Omezenou platnost pojmání difrakce coby Fourierovy transformace lze ukázat tímto postupem. Z platnosti relací neurčitosti je zřejmé, že poloměr osvětlujícího svazku a šířka difrakčního obrazce si jsou nepřímo úměrné. Tedy při zvětšování kruhového otvoru by se měl difrakční obrazec postupně zužovat až na nulovou hodnotu. Z experimentu je však zřejmé, že od jisté velikosti clony bude mít obrazec šířku právě rovnu průměru osvětlujícího svazku.

Experimentální difrakční uspořádání Příklad sestavení difrakční aparatury je uveden na obr. 3. Osvětlení clony je provedeno He–Ne laserem, jehož výstup je roztažen a homogenizován kolimátorem (tvořeným dvěma čočkami a clonkou s kruhovým otvorem o průměru několika μm). Pro zajištění podmínek Fraunhoferovy difrakce je použita spojná čočka umístěná tak, aby se zdroj záření jevil v nekonečné vzdálenosti. Difrakční obrazec dopadá na stínítko, odkud je snímán kamerou.



Obrázek 3: Optické schéma difrakční aparatury.

Poznámka 1: Pro případ, kdy tvar clony získáváme optickou projekcí a nasnímáním kamerou, je nutno rozšířit definici funkce amplitudové propustnosti, protože nelze očekávat náhlé skoky intenzity na hranicích clony, ale „povolné“ průběhy. Rozšířená definice vychází z hodnot komplexních amplitud optické vlny před a za clonou

$$\Gamma(x, y) = \frac{\text{komplexní amplituda vlny těsně za clonou}}{\text{komplexní amplituda vlny těsně před clonou}}.$$

Uvedená definice přidává funkci Γ komplexní charakter, protože může dojít i ke změně fáze (tato situace ovšem nemůže nastat, stanovujeme-li Γ kamerou).

Poznámka 2: Při snímání obrazu kamerou získáváme pouze informaci o rozložení intenzity (jedná se o kvadratický optický detektor), ztrácíme tedy fázi. Tento způsob tedy neumožňuje počítat difrakční jevy způsobené právě fázovými členy (nehomogenitou fáze v ploše clony). Při tomto způsobu zpracování tedy můžeme počítat jen se čtvercem absolutní velikosti $|\Gamma(x, y)|^2$. V případě, že by clony byly ideálně vyrobeny a projekce clon by probíhala dle pravidel geometrické optiky, nešlo by o žádné zkreslení, protože $0^2 = 0$, $1^2 = 1$. V ostatních případech by bylo nutno získané originály nejprve odmocnit (abychom získali $|\Gamma(x, y)|$), což ovšem není (v celočíselném oboru, běžně používaném při počítačovém zpracování obrazů) prostá operace, a může tudíž vnést další chyby.

1.5.3 Reciproká mřížka

Pojem reciproké mřížky je využíván v krystalografii a fyzice pevných látek, v nichž umožňuje zjednodušit teoretické popisy. Tato konstrukce je v úzkém vztahu s difrakcí rentgenova záření, která slouží jako základní nástroj výzkumu struktury krystalů. Uvažujme **ideální** krystal, který je tvořen bodovými nepohyblivými atomy umístěnými přesně v bodech krystalové mříže, tedy s polohovými vektory $\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$, kde u, v, w jsou celá čísla. Předpokládejme, že funkce popisující rozložení mřížkových

bodů je dána superpozicí Diracových δ -funkcí, posunutých do koncových bodů vektorů \vec{r} a spočítáme její Fourierovu transformaci (trojrozměrnou), čímž dostáváme

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{u,v,w=-\infty}^{\infty} \delta \left(\vec{r}_0 - (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \right) \right\} = \sum_{h,k,l=-\infty}^{\infty} \delta \left(\vec{k}_0 - \left(h \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} + k \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} + l \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})} \right) \right),$$

kde \vec{k} má charakter vlnového vektoru (s fyzikálním rozměrem *reciprokým* k \vec{r}) a nahrazuje proměnné ξ , ζ z dvojrozměrného případu. Transformovaná funkce může být interpretována jako množina mřížkových bodů v **reciprokém** prostoru, v němž je primitivní buňka popsána třemi vektory

$$\vec{a}^* = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{b}^* = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{c}^* = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}.$$

Jako poznámka může být uvedeno, že uvedenou soustavu bázevých vektorů také dostaneme, budeme-li pro vektor \vec{g} řešit soustavu rovnic

$$h = \vec{g} \cdot \vec{a}, k = \vec{g} \cdot \vec{b}, l = \vec{g} \cdot \vec{c}.$$

Její řešení je jednoznačné a $\vec{g} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$. Ekvivalentní formou zadání je požadavek, aby platilo $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j^* = \delta_{ik}$, kde $\vec{e}_i = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ a $\vec{e}_i^* = \vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$ v tomtéž pořadí, což je totéž co předchozí soustava pro $h = k = l = 1$.

1.5.4 Zobrazení čočkou

Tenká sférická čočka transformuje rovinnou vlnu dopadající pod malými úhly θ_x, θ_y na parabolickou vlnu sfokusovanou do bodu $(\theta_x f_c, \theta_y f_c)$, kde f_c je ohnisková vzdálenost. Jednotlivým směrům vln tedy připadají různé body v obrazové ohniskové rovině čočky. Bude-li dopadat na čočku optická vlna s rozložením $f(x, y)$ v předmětové ohniskové rovině, můžeme ji rozložit (Fourierovou transformací) na rovinné vlny, přičemž vlna šířící se pod úhlem $\theta_x = \lambda\zeta$, $\theta_y = \lambda\xi$ bude mít amplitudu úměrnou Fourierově transformaci $F(\zeta, \xi)$. Amplituda v obrazové ohniskové rovině tedy bude mít v bodě (x, y) hodnotu úměrnou $F(\frac{x}{\lambda f_c}, \frac{y}{\lambda f_c})$. Pro stanovení konstanty úměrnosti nejprve vyjádříme přenosové funkce volného prostoru délky d ($e^{-i\kappa d} e^{i\pi\lambda d(\zeta^2 + \xi^2)}$), přenosovou funkci čočky ($e^{i\pi(x^2 + y^2)/\lambda f_c}$), vynásobíme amplitudu vlny přenosovými funkcemi a zintegrujeme přes všechny hodnoty ζ, ξ . Budeme-li výslednou vlnu pozorovat v ohniskové rovině, bude pro její rozložení platit (v tzv. Fresnelově aproximaci) [7]:

$$g(x, y) = \frac{i}{\lambda f_c} e^{-i2\kappa f_c} F\left(\frac{x}{\lambda f_c}, \frac{y}{\lambda f_c}\right). \quad (26)$$

1.5.5 Relace neurčitosti

V kvantové mechanice se lze setkat s veličinami, jejichž hodnoty není možno přesně stanovit současně s hodnotami jiných veličin – operátory těchto veličin spolu tzv. nekomutují, neboť výsledek postupného působení operátorů na vlnovou funkci obecně závisí na pořadí. Z matematického hlediska tyto operátory nemají společné vlastní funkce, ale jsou k sobě ve vztahu (obecné) Fourierovy transformace, z čehož dle vzorce (12) plyne vzpomínaná neurčitost, protože právě disperzi D_f lze ztotožnit s kvadrátem nepřesnosti měření a předpoklad $\psi(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \pm\infty$ je základním předpokladem kvantové mechaniky pro vázané stavy.

Jako příklad lze uvést vztah mezi vlnovou funkcí ψ v x - a p -reprezentaci

$$\psi_p(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) e^{\frac{i}{\hbar} p_x x} dx$$

a tvar komutátoru $[x, p_x] = i\hbar$, z čehož plyne

$$\langle (\Delta p_x)^2 \rangle \langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$$

(symboly $\langle \cdot \rangle$ označují kvantovou střední hodnotu).

1.6 Fourierova transformace ve zpracování obrazů

Zpracování obrazů lze rozdělit na tři tématické části — restaurování obrazu, zkvalitňování zobrazení a segmentaci obrazu [11].

Restaurování obrazu

Restaurování obrazů je proces, při němž se snažíme převést obraz do takového stavu, v jakém byl před degradací (např. vlivem šumu v přenosové cestě). K úspěšnému provedení restaurace je nutno znát především způsob degradace. V praxi se ve většině případů vystačí, předpokládáme-li poškození způsobené lineárním systémem s prostorově invariantní odezvou. Působení takového systému na obraz lze vystihnout konvolučním integrálem a tedy charakterizovat ve spektrální oblasti součinem původního spektra obrazu $F(\zeta, \xi)$ a přenosové funkce $H(\zeta, \xi)$. Proces rekonstrukce pak náleží ve vytvoření filtru s přenosovou funkcí $H_f(\zeta, \xi) = H^{-1}(\zeta, \xi)$. Obecně nemusí hledaný filtr existovat, pak se hledá podle vhodně zvolených kritérií „optimální“ filtr.

Příkladem může být záznam interferenčního obrazce sloučeného s aditivním šumem. Nezašuměný interferenční obrazec bude blízký dvourozměrnému sinusovému signálu, jeho spektrum bude tedy nenulové jen v blízkém okolí průměrné frekvence. Zášuměný obraz bude mít i další složky nenulové. Ideální filtr k restaurování bude mít jednotkovou velikost pro frekvence ležící v kruhu se středem na průměrné frekvenci a nulovou pro ostatní; optimální velikost poloměru kruhu se musí určit na základě zvolených kritérií.

Zkvalitňování zobrazení

Při procesu zkvalitňování zobrazení není prioritní snaha dosažení maximální věrnosti výsledného obrazu, ale zdůraznění některých charakteristických rysů. Může se jednat např. o *intenzitní mapování*, při němž se nelineárním způsobem mění stupnice šedi v obraze, nebo *pseudokolorování*, kde se monochromatický obraz pro lidský zrak zvýrazní na základě kontrastu mezi jednotlivými barvami, které jsou přiřazeny původním stupňům šedi.

Z hlediska Fourierovy transformace jsou významné např. procesy *zostřování* obrysů, při nichž se zvýrazňují náhlé intenzitní přechody v obraze zesílením spektrálních složek s vyššími hodnotami prostorových frekvencí (v prostorové oblasti odpovídá derivaci obrazu).

Segmentace obrazu

V předchozích metodách zpracování šlo pouze o takovou úpravu obrazu, aby se z něj získalo více vizuální informace. V procesech segmentace se jedná o analýzu obrazu, která spočívá ve vytvoření **popisu** obrazu. Mezi používané metody patří např. komparace („šedivý“ obraz se převede na černobílý tak, že se porovnává intenzita v daném bodě s referenční hodnotou a na základě porovnání se přiřadí hodnota 0 nebo 1), detekce rozhraní (stanovují se čáry náhlých změn intenzity) nebo vyhledávání obrazců.

2 Rychlé algoritmy

Provádění výpočtu diskrétní Fourierovy transformace je velmi časově náročné. Vzorec (17) je vlastně ekvivalentní vyčíslení hodnoty polynomu stupně $N - 1$ s koeficienty f_i v bodě $e^{-i2\pi \frac{k}{N}}$. Jak známo, optimálním postupem pro výpočet polynomů je Hornerovo schéma, které potřebuje $N - 1$ násobení a sčítání, což pro celou transformaci dává počet operací $2 \times N \times (N - 1)$, tedy přibližně N^2 operací. Už pro malý počet zorků čas výpočtu neúměrně narůstá. Proto je nutno užít k výpočtu jiných algoritmů, které využívají speciálních vlastností definice transformace. Důležitým krokem ve vytváření časové úspory je minimalizace počtu násobení, neboť na všech výpočetních systémech je násobení časově náročnější než sčítání, což platí obzvláště pro komplexní čísla.

2.1 Algoritmus Cooleyho a Tukeyho – redukce času

Algoritmus je založen na definici Fourierovy transformace

$$F_k = \sum_{i=0}^{N-1} f_i \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{ki},$$

kteřou můžeme rozepsat do tvaru (předpokládáme, že N je mocninou dvou) [12]

$$\begin{aligned} F_k &= f_0 \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^0 + \dots + f_{N-1} \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{k(N-1)} = \\ &= \left[f_0 \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^0 + f_2 \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{2k} + \dots + f_{N-2} \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{(N-2)k} \right] + \\ &+ \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^k \left[f_1 \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^0 + f_3 \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{2k} + \dots + f_{N-1} \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{(N-2)k} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Závorky na pravé straně představují Fourierovy transformace dvou „vektorů“ $(f_0, f_2, \dots, f_{N-2})$ a $(f_1, f_3, \dots, f_{N-1})$, každého o $N/2$ složkách, z nichž se čísla F_k snadno zkombinují. Tedy první polovina čísel F_k se získá rozdělením transformace na dvě transformace o poloviční velikosti. Zbývá část F_k pro $k = N/2, \dots, N-1$ se získá z úvahy, že platí

$$\left(e^{-i \frac{4\pi}{N}} \right)^i = \left(e^{-i \frac{4\pi}{N}} \right)^{(N/2)+i}, \quad i = 0, \dots, (N/2) - 1$$

a proto se výrazy pro $F_k, F_{k+N/2}$ liší jen hodnotou $\left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^k$, zatímco transformace vektorů jsou stejné. Označíme-li závorky ve vztahu (27) jako \hat{F}_k, \check{F}_k , pak platí

$$F_k = \hat{F}_k + \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^k \check{F}_k, \quad F_{k+N/2} = \hat{F}_k - \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^k \check{F}_k \quad (28)$$

pro $k = 0, \dots, (N/2) - 1$. Uvedený postup se dá samozřejmě dále opakovat až do kroku, ve kterém budou vzorky ve skupinách po dvou. Snížení doby výpočtu plyne z úvahy $2 \times (N/2)^2 = N^2/2 < N^2$. Pro odhad rychlosti tohoto postupu platí, že existuje konstanta a taková, že provedení transformace vyžaduje čas nejvýše $aN \log N$. Nejvýše proto, že některá násobení jsou násobení jedničkou, tedy není třeba je provádět.

Provádění algoritmu Princip konkrétního výpočtu bude demonstrován na příkladu transformace pro $N = 4$. Uvažujme tedy posloupnost prvků $\{f_i\}_{i=0}^3$ a její transformaci $F_k = \sum_{i=0}^3 f_i e^{-i2\pi \frac{ki}{4}}$. Použijeme-li jednou rozklad transformace (dle C–T algoritmu), dostaneme

$$f_0 + f_2 e^{-i\pi k} + [f_1 + f_3 e^{-i\pi k}] e^{-i\pi \frac{k}{2}},$$

což pro jednotlivé hodnoty k dává

$$\begin{aligned} k=0 & \quad [f_0 + f_2] + [f_1 + f_3], \\ k=1 & \quad [f_0 - f_2] - i[f_1 - f_3], \\ k=2 & \quad [f_0 + f_2] - [f_1 + f_3], \\ k=3 & \quad [f_0 - f_2] + i[f_1 - f_3]. \end{aligned} \quad (29)$$

Je tedy vidět, že při výpočtu je nutno nejprve spočítat hodnoty tvaru $f_i \pm f_{i+2}$ a z nich poté určit výsledky podobným zkombinováním. Výpočet tedy může probíhat tak, že se nejprve spočtou hodnoty $\tilde{F}_{0,2} = f_0 \pm \sigma f_2$, $\tilde{F}_{1,3} = f_1 \pm \sigma_1 f_3$, kde $\sigma = \sigma_1 = e^{-i\pi} = 1 + i0$. Ve druhém kroku se spočítají konečné hodnoty $F_{0,2} = \tilde{F}_0 \pm \sigma \tilde{F}_2$, $F_{1,3} = \tilde{F}_1 \pm \sigma_1 \tilde{F}_3$, kde $\sigma = e^{-i\pi} = 1 + i0$ a $\sigma_1 = \sigma e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$. Tento postup lze již jednoduše zobecnit pro libovolné N , které je mocninou dvojky. Pro lepší orientaci v poli je však vhodnější vstupní posloupnost přerovnat, protože v jednotlivých součtech se sčítají prvky v tzv. bitově převráceném kódu (např. původnímu binárnímu číslu 0011010 odpovídá číslo 0101100).

2.2 Algoritmus s redukcí kmitočtu

Algoritmus spočívá v rozdělení posloupnosti vzorků $\{f_i\}_0^{N-1}$ na dvě poloviční s přirozeným uspořádáním vzorků $\{f_i\}_0^{(N/2)-1}$, $\{f_i\}_{N/2}^{N-1}$. Provedeme-li definiční transformaci, uvidíme, že je možno výstupní posloupnost rozdělit na sudou a lichou část, kde sudá část je dána transformací $N/2$ -členné součtové posloupnosti vstupních dvou a lichá část je dána transformací rozdílové posloupnosti. Postup rozdělení lze opět opakovat až na dvojice vzorků. Pro odhad doby výpočtu platí totéž jako u redukce časové — $aN \log N$.

Inverzní transformace Oba dva algoritmy můžeme použít i pro výpočet inverzní transformace

$$f_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(e^{i \frac{2\pi}{N}} \right)^{ki},$$

protože provedeme-li komplexní sdružení a vynásobení N , dostáváme

$$N f_i^* = \sum_{k=0}^{N-1} F_k^* \left(e^{-i \frac{2\pi}{N}} \right)^{ki}, \quad (30)$$

což představuje přímou transformaci vzorků F_k^* a hledaný signál můžeme získat vydělením N a komplexním sdružením.

2.3 Sloučený algoritmus

Tento algoritmus je založen na vlastnosti transformace reálných posloupností, na její redundanci: $F_k = F_{N-k}^*$. Při provádění transformace se zároveň vypočítávají Fourierovy koeficienty pro dvě nezávislé posloupnosti f_i, g_i tak, že se spočítá transformace posloupnosti $f_i + i g_i$. Z těchto hodnot se pak příslušné koeficienty určí jako lineární kombinace reálné a imaginární části. Za vstupní posloupnosti lze vzít např. dva následující řádky obrazu, pak je doba výpočtu poloviční. Metoda neumožňuje další snižování náročnosti.

2.4 Algoritmus FFT s prvočíselným rozkladem

Přestože je Cooleyho a Tukeyův algoritmus velmi rychlý, je možno sestavit algoritmy (v některých případech) ještě rychlejší. Jedná se o algoritmy Winogradova a Kolbeho–Parkseho (tzv. FFT s prvočíselným rozkladem) [12,13]. Tyto postupy jsou založeny na rozdělení transformace N -složkového vektoru, kde $N = N_1 N_2 \cdots N_n$ a N_i jsou prvočísla či jejich mocniny, na n transformací vektorů o N_i složkách. Pro $N_i = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 16$ se ukazuje, že počet aritmetických operací v těchto algoritmech je menší než u původního algoritmu. U Winogradova algoritmu je počet násobení dokonce minimální možný.

Uvažujme druhý algoritmus a postup provedme nejprve pro $n = 2$. Zvolme čísla i_1, i_2, k_1, k_2 tak, aby $k = k_1 + N_1 k_2$, $i = i_2 + N_2 i_1$ a $0 \leq k_1, i_1 < N_1$, $0 \leq k_2, i_2 < N_2$. Pak pro transformaci platí

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{i=0}^{N-1} f_i e^{-i 2\pi \frac{ki}{N}} = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} f_{i_2+N_2 i_1} e^{-i 2\pi \frac{(k_1+N_1 k_2)(i_2+N_2 i_1)}{N_1 N_2}} = \\ &= \sum_{i_2=0}^{N_2-1} f_{k_1, i_2}^{(1)} e^{-i 2\pi \frac{k_2 i_2}{N_2}}, \end{aligned}$$

kde

$$f_{k_1, i_2}^{(1)} = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} f_{i_2+N_2 i_1} e^{-i 2\pi \frac{k_1 i_1}{N_1}}.$$

Transformace se tedy rozpadá na dvě části:

1. nejprve určíme obrazy N_1 vektorů o N_2 složkách,
2. pak určíme obrazy N_2 vektorů o N_1 složkách.

Zvolíme-li $N_1 = N_2 = \sqrt{N}$, je doba výpočtu úměrná $N^{3/2}$.

Nyní volme číslo $N = N_1 N_2 \cdots N_n$, $N_i = 2$ a rozložme čísla $k = \sum_{i=0}^n k_i 2^{i-1}$, $j = \sum_{m=0}^{n-1} j_{n+1-m} 2^{m-1}$, $k_i, j_m = 0, 1$. Vyjádříme-li nyní transformaci, dostáváme

$$\begin{aligned}
F_{k_1, \dots, k_n} &= F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} = \frac{1}{2} \sum_{j_n=0}^1 \cdots \sum_{j_1=0}^1 f_{j_n+2j_{n-1}+\dots+2^{n-1}j_1} \times \\
&\times \exp \left[-i2\pi \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^{n-m+1} k_i 2^{i+m-n+2} \right) j_{n+1-m} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j_n=0}^1 \exp \left(-i2\pi j_n 2^{-n} \sum_{i=1}^n k_i 2^{i-1} \right) \left(\frac{1}{2} \sum_{j_{n-1}=0}^1 \exp \left(-i2\pi j_{n-1} 2^{1-n} \sum_{i=1}^{n-1} k_i 2^{i-1} \right) \cdots \right. \\
&\cdots \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^1 \exp \left(-i2\pi j_1 2^{-1} k_1 \right) f_{j_n+2j_{n-1}+\dots+2^{n-1}j_1} \right) \cdots \right).
\end{aligned}$$

Tento vztah je možno zapsat rekurentně ve tvaru :

$$\begin{aligned}
F_{k_1, \dots, k_m; j_{m+1}, \dots, j_n}^{(m)} &= \frac{1}{2} \sum_{j_m=0}^1 \exp \left(-i2\pi j_m 2^{-m} \sum_{i=1}^m k_i 2^{i-1} \right) F_{k_1, \dots, k_{m-1}; j_m, \dots, j_n}^{m-1}, \\
F_{j_1, \dots, j_n}^{(0)} &= f_{j_n+2j_{n-1}+\dots+2^{n-1}j_1}, F_{k_1, \dots, k_n}^{(n)} = F_{k_1, \dots, k_n} = F_k.
\end{aligned}$$

Celková náročnost výpočtu je úměrná $N \log N$.

2.5 Algoritmy v konečných okruzích

Dříve uvedené algoritmy provádí výpočty v tělese komplexních čísel a potřebují vyčíslovat hodnoty $e^{-i2\pi \frac{k}{N}}$, což jsou zpravidla iracionální čísla. Výpočty lze proto provádět jen přibližně a odhad přesnosti výpočtu je velmi složitý. Proto je výhodné použít některého konečného tělesa, v němž budeme počítat modulo Q , kde Q je přirozené číslo takové velikosti, aby v tělese čísel $0, \dots, Q$ existoval N -tý primitivní kořen jednotky (tj. takové číslo σ , že $\sigma^N = 1 \pmod{Q}$, $\sigma^i \neq 1 \pmod{Q}$ pro $i = 1, \dots, N-1$) a aby bylo umožněno vyčíslení hodnot. Navíc se ukazuje, že daná čísla nemusí tvořit těleso, ale bude stačit, budou-li splněny následující požadavky pro čísla $x, y \in \{1, \dots, Q-1\}, N, Q$ a číslo $1 < \sigma < Q$ [12]:

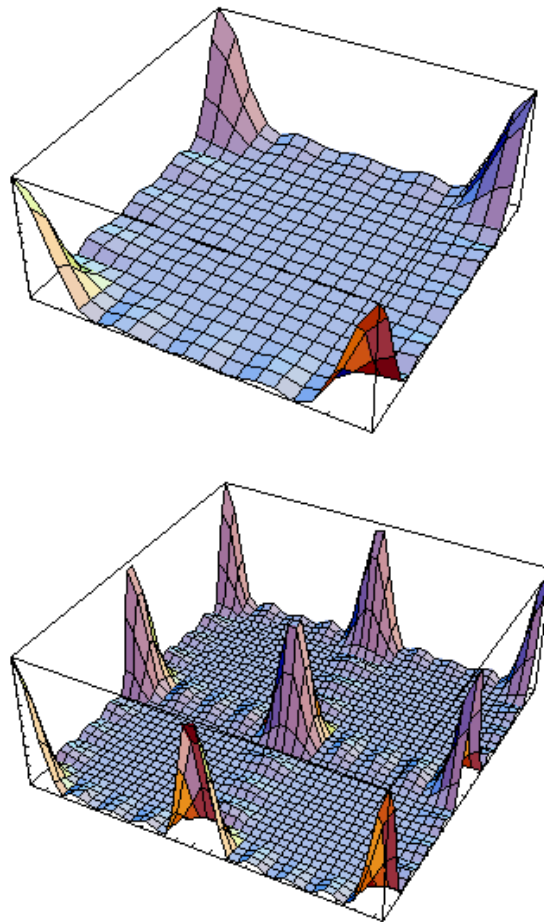
$$\begin{aligned}
\sigma^N &= 1 \pmod{Q}, \sigma^i \neq 1 \pmod{Q} \text{ pro } i = 1, \dots, N-1 \\
\sum_{i=0}^{N-1} \sigma^{ij} &= \begin{cases} N & \text{pro } j = 0 \\ 0 & \text{pro } j = 1, \dots, N-1 \end{cases} \\
x\sigma &= 1 \pmod{Q}, \quad yN = 1 \pmod{Q}.
\end{aligned}$$

První vztah je základním požadavkem Fourierovy diskrétní transformace, druhý zaručuje rozdílnost jednotlivých mocnin σ a tím možnost vyčíslení „polynomu“ v N bodech, poslední dva vztahy zaručují možnost definice matice inverzní transformace a třetí vztah zaručuje její inverznost k matici přímé transformace.

Důležitou otázkou je volba velikosti Q . Lze dokázat, že je-li Q prvočíslo, vytváří těleso a N -tý primitivní kořen jednotky v něm existuje právě tehdy, když N dělí $Q-1$. Je-li tedy $N = 2^i$, je vhodné volit $Q = n2^i + 1$, kde n je celé číslo. V obecném případě můžeme volit $Q = 2^{2^i/2} + 1$ pro $\sigma = 2$ a při počítání modulo Q budou splněny všechny požadované vztahy. Tato volba navíc umožňuje převést násobení mocninami σ na posuny a odčítání, ale vyžaduje velkou délku binárního zápisu.

Seznam použité literatury

1. Kufner, Alois; Kadlec, Jan : **Fourierovy řady**, *Academia* 1969
2. Veit, Jan : **Integrální transformace**, *SNTL* 1983
3. Rektorys, Karel : **Přehled užití matematiky**, *Prometheus* 1995
4. kolektiv autorů : **Aplikovaná matematika**, *SNTL* 1997
5. Čížek, Václav : **Diskrétní Fourierova transformace a její použití**, *SNTL* 1981
6. Uhlíř, Jan; Sovka, Pavel : **Číslicové zpracování signálů**, *ČVUT* 1995
7. Saleh, Bahaa E. A.; Teich, Malvin Carl : **Základy fotoniky**, *Matfyzpress* 1994–96
8. Vrba, Vladislav : **Moderní aspekty klasické fyzikální optiky**, *Academia* 1974
9. Vejražka, František : **Signály a soustavy**, *ČVUT* 1996
10. Jaroslavskij, Leonid; Bajla, Ivan : **Metódy a systémy číslicového spracovania obrazov**, *Alfa* 1989
11. Ptáček, Milan : **Digitální zpracování a přenos obrazové informace**, *NADAS* 1983
12. Kučera, Luděk; Nešetřil, Jaroslav : **Algebraické metody diskrétní matematiky**, *SNTL* 1989
13. Бахвалов, Н.С. : **Численные методы**, *Наука* 1973



Obrázek 4: Fourierova transformace čtverce 5×5 bodů, zobrazen čtverec absolutní hodnoty.