Miroslav Mašláň, Libor Machala, Jiří Tuček

# PRAKTIKUM Z ATOMOVÉ A JADERNÉ FYZIKY

Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci 2005



#### Seznam úloh:

- 1. Charakteristika Geigerova-Müllerova detektoru
- 2. Určení hmotnostního součinitele zeslabení beta záření
- 3. Porovnání účinnosti scintilačního a Geigerova-Müllerova detektoru záření gama
- 4. Ověření statistického charakteru přeměnového zákona
- 5. Měření poločasu rozpadu <sup>137</sup>Ba
- 6. Absorpce záření  $\alpha$  v látce
- 7. Interakce γ záření s látkou
- 8. Studium elektrono-pozitronové anihilace
- 9. Měření spekter zářičů γ
- 10. Experimentální pozorování Mössbauerova jevu
- 11. Studium vlastností plynového proporcionálního detektoru
- 12. Dozimetrie ionizujícího záření a ochrana před jejich účinky
- 13. Určení relativního obsahu izotopu <sup>40</sup>K v přirozené směsi draslíku

#### Přílohy

- 1. Rozpadová schémata některých vybraných radioaktivních izotopů
- 2. Stanovení parametrů exponenciální závislosti metodou lineární regrese
- 3. Tabulka hodnot  $\chi^2$

#### 1. Charakteristika Geigerova-Müllerova detektoru

#### Cíl laboratorního cvičení:

Seznámit se s principy činnosti a s charakteristikami Geigerova-Müllerova (GM) detektoru ionizujícího záření.

#### Pomůcky:

Geigerova-Müllerova trubice, jednokanálový analyzátor, regulovatelný zdroj vysokého napětí, zdroje záření, osciloskop

#### Teoretický rozbor:

#### Princip činnosti GM detektoru

Geigerova-Müllerova detekční trubice je trubice válcového tvaru, kde plášť tvoří katodu a tenký vodič (drát) v ose válce je anodou. Primární částice vstupující do pracovního objemu detektoru ionizuje jeho náplň a elektrony vytvořené primární ionizací jsou elektrickým polem urychlovány tak, že způsobují na své dráze ionizaci neutrálních atomů či molekul plnícího plynu. Elektrony vzniklé tímto procesem jsou v důsledku vysoké intenzity elektrického pole v oblasti anody urychlovány natolik, že kromě nárazové ionizace mohou excitovat atomy nebo molekuly plynové náplně. Pravděpodobnost této excitace roste s rostoucí energií elektronů a tedy i s pracovním napětím trubice (napětí mezi katodou a anodou).

Deexcitaci atomů nebo molekul plynové náplně provází emise fotonového záření, spadajícího do ultrafialové či krátkovlnné viditelné oblasti spektra. Tyto deexcitační fotony se šíří všemi směry a je-li jejich energie větší než výstupní práce elektronů z kovového povrchu katody dojde po jejich dopadu na povrch katody k emisi fotoelektronů. Fotoelektrony vzniklé na katodě se účinkem elektrického pole pohybují k anodě a celý proces se opakuje. Takto se primární ionizace rozšíří během několika µs podél celé anody a výsledné plynové zesílení dosáhne hodnot 10<sup>6</sup> až 10<sup>10</sup>. V důsledku snížení elektrického pole vlivem prostorového náboje kladných iontů v oblasti anody, které ve formě trubice obalí anodu po celé její délce, přestanou elektrony excitovat plynovou náplň, ustane tvorba deexcitačních fotonů, na katodě přestanou vznikat fotoelektrony a výboj v trubici ustává. K přerušení dojde vždy až po vytvoření téhož počtu kladných iontů při výboji. Amplituda signálu (proudového impulzu v obvodu tvořeném Geigerovou-Müllerovou trubicí a zdrojem pracovního vysokého napětí) z detektoru je tedy nezávislá na počtu primárně vytvořených nosičů náboje a tedy i na energii částice, která ionizaci vyvolala.

Koaxiální vrstva kladných iontů se pohybuje ke katodě, na povrchu které se ionty neutralizují záchytem elektronů. Při tomto procesu se uvolňuje energie, která může být vyšší než výstupní práce elektronů z povrchu katody a je energeticky možná emise volných elektronů z katody. Pravděpodobnost tohoto procesu je sice velice nízká, ale při velkém počtu kladných iontů v koaxiální vrstvě je alespoň jeden elektron z katody uvolněn. Tento elektron vyvolá sekundární ionizaci plynové náplně a celý proces se opakuje. Výsledkem primární ionizace jedinou částicí není jediný impulz, ale posloupnost impulzů. Aby mohla trubice registrovat jednotlivé nabité částice procházející pracovním objemem jako jednotlivé impulzy je potřebné předejít sekundární ionizaci plynové náplně. Tento proces se nazývá zhášením. Podle způsobu realizace zhášení se Geigerovy-Müllerovy detekční trubice dělí na nesamozhášecí a samozhášecí. V současné době se již nepoužívají nesamozhášecí trubice, ke zhášení kterých se používají vnější elektronické obvody. V samozhášecích trubicích se zhášení realizuje pomocí organických zhášecích příměsí (např. ethylalkohol, ethylester kyseliny mravenčí) a nebo pomocí příměsi halogenů.

Kladné ionty při svém pohybu ke katodě vykonají řadu srážek s neutrálními molekulami, některé z nich jsou molekulami zhášecího plynu. V důsledku rozdílu ionizačních energií obou plynů je tendence k přenosu kladného náboje na molekuly zhášecího plynu, kladné ionty primární složky náplně jsou neutralizovány a místo nich pokračují ke katodě kladné ionty zhášecí plynové příměsi. Při jejich neutralizaci se uvolněná energie využije daleko pravděpodobněji k disociaci jejich složitých molekul než k uvolnění elektronu z povrchu katody. Nevýhodou organických zhášecích příměsí je životnost trubice omezená postupným snižováním počtu neutrálních molekul zhášecího plynu, protože disociované molekuly organických příměsí nejsou schopny regenerace v původní molekulu. Molekuly halogenů disociované při zhášení mají schopnost opět rekombinovat v neutrální molekulu, což umožňuje vyrobit trubice s teoreticky neomezenou životností.

#### Charakteristiky GM detektorů

Geigerovy-Müllerovy detekční trubice se obvykle charakterizují pomocí těchto parametrů:

- prahové a pracovní napětí,
- délka a stoupání pracovní plošiny (plateau),
- mrtvá doba a doba zotavení.

4

Všechny výše uvedené parametry s výjimkou mrtvé doby a doby zotavení můžeme určit z tzv. **počítací charakteristiky** Geigerovy-Müllerovy trubice (obr. 1).



Obr. 1. Počítací charakteristika GM detektoru (N - četnost registrovaných částic,  $U_{VN}$  - napětí na trubici).

Umístíme-li zdroj ionizujícího záření do blízkosti GM trubice, ke které je připojeno nízké napětí, trubice nebude registrovat žádné částice. Při postupném zvyšování napětí na trubici zjistíme, že při jisté hodnotě napájecího napětí začne detektor registrovat částice. Odpovídající hodnota napájecího napětí  $U_0$  se nazývá **prahovým napětím**. Jeho velikost závisí na typu použité GM trubice.

Zvyšujeme-li napětí na GM trubici nad prahovou hodnotu, je počáteční rychlý růst počtu registrovaných částic vystřídán oblastí, v níž počet registrovaných impulzů téměř nezávisí na intenzitě elektrického pole v trubici a tedy na napájecím napětí GM trubice. Tato část počítací charakteristiky se nazývá **pracovní plošinou** (plateau). Délka pracovní plošiny závisí na typu, ale i na kvalitě dané GM trubice. Přibližně uprostřed (nebo v první polovině) pracovní plošiny se volí **pracovní napětí** trubice.

Další zvyšování napětí za oblast pracovní plošiny vede k prudkému nárůstu četnosti registrovaných impulzů vlivem selhání zhášecího mechanismu a k nepřetržitému procesu tvorby dalších výbojů. Tyto výboje jsou pro zhášecí náplň počítače velmi nebezpečné a již po krátké době vedou k poškození GM detektoru.

**Stoupání (strmost) pracovní plošiny** se určuje z počítací charakteristiky. Obvykle se vztahuje na interval napětí 100 V a udává se v procentech. Jsou-li  $N_A$  a  $N_B$  počty registrovaných impulzů pro napětí  $U_A$  a  $U_B$  z oblasti plata, přičemž  $U_B$  -  $U_A$  = 100 V, pak relativní strmost plata S se určí ze vztahu

$$S = \frac{2(N_{\rm B} - N_{\rm A})}{(N_{\rm B} + N_{\rm A})} \cdot 100 \% .$$
(1)

#### Mrtvá doba a doba zotavení

Po ionizaci plynové náplně primární částicí sníží prostorový náboj kladných iontů obalujících anodu intenzitu elektrického pole natolik, že elektrony pocházející z další interakce registrovaného záření nevytvoří laviny a nemohou být zaregistrovány. Časový interval, během kterého je detektor naprosto necitlivý, se nazývá **mrtvá doba**  $t_D$ . Amplituda impulzu z interakce, ke které došlo okamžitě po uplynutí mrtvé doby, je velmi malá a zvětšuje se, jestliže k této interakci dojde později. Amplitudu původní velikosti má impulz od interakce, která nastala až všechny kladné ionty byly sebrány na katodě a došlo k úplnému obnovení elektrického pole v trubici. Čas mezi koncem mrtvé doby a okamžikem, kdy má amplituda impulzu již původní velikost, se nazývá **doba zotavení** (regenerace)  $t_R$ .

Při aplikaci GM detektorů se uplatní **efektivní mrtvá doba**  $t_{\text{Def}}$ , která je závislá na mrtvé době GM trubice a na nastavení diskriminační hladiny vyhodnocovacího zařízení. Z hlediska minimalizace počítacích ztrát je vhodné nastavit diskriminační hladinu co nejníže (zvyšuje se tím však pravděpodobnost registrace impulsů v důsledku šumu). Na velikost mrtvé doby má vliv i napájecí napětí GM trubice, s jeho zvyšováním se vlivem zvyšování driftové rychlosti kladných iontů mrtvá doba zkracuje. Obecně platí  $t_{\text{D}} < t_{\text{Def}}$ .

#### Měření mrtvé a zotavovací doby pomocí osciloskopu

Oscilogram impulzů z GM detektoru umožňující zjištění mrtvé doby a doby regenerace je na obr.2. Časová základna osciloskopu je spouštěna impulzem, který se zobrazuje na počátku. První pozorovatelné impulzy malých amplitud se objevují až po uplynutí mrtvé doby. Amplituda dalšího impulzu závisí na časovém odstupu od spouštěcího impulzu, plnou amplitudu dosáhne pouze impulz, jehož odstup za impulzem, který spustil časovou základnu, je větší nebo roven  $t_D + t_R$ . V jednom běhu časové základny se v intervalu <0,  $t_D>$  nikdy neobjeví ani jeden impulz, zatímco v intervalu  $<t_D$ ,  $t_D + t_R>$  se může objevit nejvýše jeden impulz, po němž vždy následuje mrtvá doba  $t_D$ . Množina impulzů proměnných amplitud patrná na oscilogramu v intervalu  $<t_D$ ,  $t_D + t_R>$  je pouze optický klam, každý impulz pochází z jednoho přeběhu časové základny. Tak vzniká mylný dojem, že v době zotavení je možná registrace více impulzů.



Obr. 2. Oscilogram impulzů z GM detektoru. (*t*<sub>D</sub> - mrtvá doba, *t*<sub>R</sub> - doba zotavení)

#### Stanovení efektivní mrtvé doby metodou 2 zářičů

Mezi četností částic dopadajících do pracovního objemu detektoru n a četností zaregistrovaných impulzů N platí vztah

$$n = \frac{N}{1 - Nt_{\text{Def}}},\tag{2}$$

kde  $t_{Def}$  je efektivní mrtvá doba. Vztah (2) získáme, vyjádříme-li efektivní mrtvou dobu jako rozdíl  $t_{Def} = \frac{1}{N} - \frac{1}{n}$ .

Je-li  $n_1$  četnost částic procházejících pracovním objemem detektoru z prvního zářiče, registrujeme  $N_1$  impulzů, podobně máme  $n_2$ ,  $N_2$  pro druhý zářič. Odpovídají-li četnosti  $n_0$ ,  $N_0$ pozadí, pak nutně platí

$$n_1 + n_2 = n_{12} + n_0 , \qquad (3)$$

kde  $n_{12}$  je počet částic dopadajících na GM trubici z obou zářičů současně (registrovanou četnost označíme  $N_{12}$ ). Pozadí  $n_0$  na pravé straně rovnice (3) musí být připočteno, neboť v hodnotách  $n_1$ ,  $n_2$  a  $n_{12}$  je započteno i pozadí. Za zjednodušujícího předpokladu  $n_{12} \approx N_1 + N_2 - N_0$  lze využitím vztahů (2) a (3) vyjádřit efektivní mrtvou dobu

$$t_{\rm Def} = \frac{N_1 + N_2 - N_{12} - N_0}{N_{12} \left( N_1 + N_2 - N_0 \right)} \,. \tag{4}$$

#### Postup měření:

 Změřte a sestrojte počítací charakteristiku GM trubice a z této charakteristiky určete hodnoty prahového a pracovního napětí, délku a stoupání plata. Měření počtu registrovaných impulzů proveď te s přesností alespoň 3%.

- Stanovte mrtvou dobu a dobu zotavení použité GM trubice osciloskopickou metodou pro pět různých napětí z oblasti plata. Výsledky shrňte do tabulky, znázorněte do grafu a diskutujte.
- Změřte efektivní mrtvou dobu GM trubice metodou dvou zářičů. Dbejte na to, aby se při umísťování jednoho ze zářičů před detektor či jeho odebírání neměnila poloha druhého zářiče vůči detektoru.

Literatura: [1], [2]

### 2. Určení hmotnostního součinitele zeslabení záření $\beta^{-85}$ Kr

Cíl laboratorního cvičení: Studovat zeslabení záření  $\beta^-$  v různých materiálech.

**Pomůcky:**  $\beta^-$  zářič <sup>85</sup>Kr, hliníkové a plastové fólie, mikrometr, scintilační detekční sonda, jednokanálový analyzátor.

#### Teoretický rozbor:

#### <u>Přeměna β</u><sup>-</sup>

Přeměnu  $\beta^-$  (dále jen přeměna  $\beta$ ) zjednodušeně popisuje následující rovnice

$$n \to e^- + p + \overline{\nu}_e, \tag{5}$$

kde *n* je neutron, *p* proton, *e*<sup>-</sup> elektron,  $\overline{\nu}_e$  elektronové antineutrino. V důsledku platnosti zákonů zachování energie a hybnosti je energetické spektrum záření  $\beta$  spojité (obr.3). Maximální energie, kterou mohou elektrony při přeměně  $\beta$  získat, se nazývá hraniční energie  $E_{\text{max}}$ . S největší pravděpodobností jsou však při přeměně  $\beta$  produkovány elektrony s energií  $E_z = E_{\text{max}} / 3$ .



Obr.3. Energetické spektrum záření  $\beta^{90}$ Sr.

#### Interakce záření $\beta^-$ (elektronů) s látkou

V oblasti energií do 1 MeV jsou hlavními procesy, jimiž elektrony ztrácejí energii při průchodu látkou, ionizace a excitace elektronových obalů atomů prostředí. V oblasti vyšších energií je dominantním procesem ztráty energie tvorba brzdného rentgenového záření. Podíl pružných srážek s atomovými jádry v brzdném procesu je zanedbatelný.

Procesy ionizace a excitace atomů prostředí jsou zodpovědné za tzv. elektronovou složku energetických ztrát letícího elektronu. Závislost této složky na rychlosti elektronu (pro nerelativistické elektrony) a na parametrech prostředí vyjadřuje vztah

$$S_{\rm el} = -\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\rm el} = \frac{4\pi\,\mathrm{e}^4}{mv^2} N_{\rm A} Z \ln\!\left(\frac{mv^2}{2I}\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}\right),\tag{6}$$

kde *m* je hmotnost elektronu, *v* rychlost elektronu, e elementární náboj,  $N_A$  Avogadrova konstanta, *Z* protonové číslo atomů látkového prostředí a *I* střední excitační energie atomů prostředí.

S rostoucí energií (rychlostí) elektronů se zmenšuje elektronová složka energetických ztrát. Při vyšších energiích (např. pro olovo při energiích nad 0,5 MeV) se začíná více uplatňovat vznik brzdného záření a při velmi vysokých energiích se tento proces stává dominantním. Prochází-li částice v blízkosti jádra, působí mezi jádrem a částicí  $\beta$  coulombovské síly, které částici brzdí. V souladu s klasickou teorií vyzařuje při tomto procesu bržděná částice elektromagnetické záření. Energetické ztráty vyvolané vznikem brzdného záření v závislosti na energii částic a parametrech prostředí vyjadřuje vztah

$$S_{\rm br} = -\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\rm br} = N_{\rm A} \frac{4}{137} \left(\frac{e^2 Z}{mc^2}\right)^2 \left(\ln\frac{2E}{mc^2} - \frac{1}{3}\right),\tag{7}$$

kde E je energie dopadajících elektronů. Závislost energetických ztrát elektronů při jejich brždění v olovu na jejich energii je ukázána na obr. 4.



Obr.4. Energetické ztráty elektronů při průchodu látkovým prostředím.

Úhrnný poměr ztrát energie elektronu brzdným zářením a elektronovým brzděním je dán přibližně vztahem

$$\left(\frac{\frac{dE}{dx}}{\frac{dE}{dx}}\right)_{\rm br} \approx \frac{ZE}{800},$$
(8)

kde E je energie elektronu v MeV.

Zeslabení toku elektronů (záření  $\beta^{-}$ ) procházejících prostředím je určeno jejich rozptylem a skutečnou absorpcí. Je-li  $\Delta I_0$  počet částic dopadajících na vstupní okénko detektoru bez přítomnosti absorbujícího materiálu, může být vyjádřen počet částic dopadajících na vstupní okénko detektoru při vložení absorbujícího materiálu tloušťky *d* vztahem

$$\Delta I = \Delta I_0 e^{-\mu d} \quad , \tag{9}$$

kde  $\mu$  je <u>lineární součinitel zeslabení</u>. Lineární součinitel zeslabení může být ze vztahu (9) vyjádřen

$$\mu = \frac{\ln \frac{\Delta I_0}{\Delta I}}{d} \quad . \tag{10}$$

Lineární součinitel zeslabení  $\mu$  se často nahrazuje tzv. <u>hmotnostním součinitelem</u> zeslabení  $\mu_m$ , který je definován vztahem

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} , \qquad (11)$$

kde  $\rho$  je hustota prostředí. Hmotnostní součinitel zeslabení je neměnný pro různá látková prostředí a danou energii záření  $\beta$ . Jeho hodnotu lze odhadnout pomocí empirického vztahu

$$\mu_m \approx \frac{2.2}{E_z^{1,333}} \,[\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}], \text{ pro } E_z > 0.5 \text{ MeV},$$
 (12)

kde  $E_z$  je nejpravděpodobnější energie částic  $\beta$  v MeV. Zákon absorpce (9) je nyní možné zapsat ve tvaru

$$\Delta I = \Delta I_0 e^{-\mu_m m_s} , \qquad (13)$$

kde  $m_s = \rho d$  je tzv. plošná hmotnost absorbujícího prostředí.

Kromě součinitele zeslabení se obecně k charakterizaci zeslabení toku částic prostředím používá veličina <u>polotloušťka</u>  $d_{1/2}$ , což je tloušťka prostředí potřebná ke snížení počtu částic dopadajících na vstupní okénko detektoru na polovinu. Velikost polotlouštky je dána výrazem

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}.$$
 (14)

Analogicky jako hmotnostní součinitel zeslabení lze definovat i hmotnostní polotloušťku



$$m_{1/2} = \frac{\rho \ln 2}{\mu}.$$
 (15)

Obr.5. Křivka zeslabení toku monoenergetických částic β.

Idealizované zeslabení toku monoenergetických částic  $\beta$  je znázorněno na obr.5 čárkovanou křivkou. Tloušťka prostředí, které odpovídá prudký pokles detekovaných částic, je možné pokládat za dosah elektronů *R*. V praxi se tvar absorpční křivky (plná čára) liší od ideální. Malý pokles intenzity záření při větších tloušťkách absorbujícího prostředí je způsoben přítomností brzdného záření a doprovodným zářením  $\gamma$ .

#### Postup měření:

- Změřte křivky zeslabení pro záření β<sup>85</sup>Kr v hliníku a plastové fólii. Všechna měření provádějte tak, aby jejich relativní chyba byla menší než 3 % (tj. při každém měření detekujte minimálně 1000 částic).
- 2. Z křivek určete lineární a hmotnostní součinitele zeslabení a lineární a hmotnostní polotloušťky pro hliník i plastovou folii. Použijte metodu lineární regrese, požijte vztahů (83) a (84) (viz kapitola "Stanovení parametrů exponenciální závislosti metodou lineární regrese"), ve kterých položte B = ΔI<sub>0</sub>, A = μ, x<sub>i</sub> = d<sub>i</sub>, y<sub>i</sub> = I<sub>i</sub>, kde (d<sub>i</sub>, ΔI<sub>i</sub>), i = 1,...,n jsou experimentálně naměřené hodnoty veličin d a ΔI. Hustoty hliníkové, respektive plastové fólie jsou ρ<sub>Al</sub> = 2698 kg·m<sup>-3</sup>, ρ<sub>folie</sub> = 1324 kg·m<sup>-3</sup>. Výsledky prezentujte graficky.
- Porovnejte experimentálně získané hmotnostní součinitele zeslabení pro hliník i plastovou folii s výsledkem empirického vztahu (12).

Literatura: [2] - [4]

#### 3. Porovnání účinnosti scintilačního a Geigerova-Müllerova detektoru

#### záření y

#### Cíl laboratorního cvičení:

Experimentálně stanovit účinnost scintilačního a Geigerova-Müllerova detektoru pro detekci záření γ.

**Pomůcky:** Scintilační detektor se scintilátorem NaI(Tl), Geiger-Müllerův detektor, radioaktivní zářič <sup>137</sup>Cs, jednokanálový analyzátor.

#### Teoretický rozbor:

Účinností  $f_{\underline{u}} = N/N_0$  detektoru ionizujícího záření rozumíme poměr počtu *N* částic registrovaných detektorem k celkovému počtu  $N_0$  částic dopadajících do pracovního objemu detektoru. Pro Geiger-Müllerovy (GM) trubice je  $f_u$  pro záření  $\alpha$  rovno 1,0 (100%), pro  $\beta$  0,996 a pro  $\gamma$  0,005 až 0,002. Účinnost  $f_u$  při detekci  $\gamma$  záření GM trubicí závisí na energii záření, např. pro  $E_{\gamma} = 1$  MeV je  $f_u \approx 0,005$  a pro  $E_{\gamma} = 0,5$  MeV je  $f_u \approx 0,002$ . Pro scintilátor NaI(Tl) je detekční účinnost závislá na rozměrech scintilátoru a na energii  $\gamma$  záření, např.  $f_u \approx$  0,40 ( $E_{\gamma} = 1$  MeV) a  $f_u \approx 0,60$  ( $E_{\gamma} = 0,5$  MeV). Pro Ge(Li) polovodičové detektory je účinnost detekce záření  $\gamma$  o jeden až dva řády menší než pro NaI(Tl) scintilační detektory.

Je-li registrovaná četnost impulsů záření  $\gamma$  včetně pozadí rovna  $n_{\gamma}$  a četnost pozadí rovna  $n_0$  a není-li nutná korekce na mrtvou dobu detektoru, můžeme vyjádřit výslednou korigovanou četnost registrovaných impulsů

$$n = n_{\gamma} - n_0 = A f_{\rm u} f_{\rm g} f_{\rm rs} f_{\rm a} f_{\rm s} f_{\rm zr} , \qquad (16)$$

kde *A* je aktivita (četnost radioaktivních přeměn) radioaktivního preparátu,  $f_g$  je korekce na geometrii měření,  $f_{rs}$  je korekce na rozpadové schéma,  $f_a$  je korekce na absorpci záření,  $f_s$  je korekce na samoabsorpci, a  $f_{zr}$  je korekce na zpětný rozptyl.

<u>Korekce na geometrii měření</u>. Korekčním součinitelem  $f_g$  rozumíme poměr prostorového úhlu  $\Omega$ , pod nímž vidíme citlivý objem detektoru ze středu radioaktivního zářiče, a plného prostorového úhlu  $4\pi$ , tedy

$$f_{\rm g} = \frac{\Omega}{4\pi} \,. \tag{17}$$

Je-li účinná plocha detektoru  $S \ll 4\pi r^2$  (*r* je střední vzdálenost účinné plochy detektoru od středu zářiče), je tato plocha přibližně součástí kulové plochy o poloměru *r* a s ohledem na definování prostorového úhlu platí

$$f_g = \frac{S}{4\pi r^2}.$$
 (18)

<u>Korekce na rozpadové schéma</u>. Součinitel  $f_{rs}$  určuje pravděpodobnost takových přeměn jádra, při nichž jsou emitovány částice nebo fotony daného druhu energie. Například <sup>137</sup>Cs (obr. 6) emituje při přeměně 93,5 %  $\beta$  částic o hraniční energii 0,52 MeV, vzniká excitované jádro <sup>137</sup>Ba, které podléhá gama přeměně s emisí fotonu o energii 0,662 MeV. Dále <sup>137</sup>Cs emituje při přeměně 6,5 %  $\beta$  částic o energii 1,18 MeV. To znamená, že korekční součinitel pro detekci gama záření pro <sup>137</sup>Cs je  $f_{rs} = 0,935$ .



Obr. 6. Rozpadové schéma zářiče <sup>137</sup>Cs.

Celkový výtěžek pro všechny fotony záření  $\gamma$  však může být dokonce větší než 100 % v případech, kdy vyzářením částic  $\beta$  vznikají dceřinná jádra ve vybuzených stavech, která postupnou emisí fotonů záření  $\gamma$  přecházejí do základního stavu. Rozpadová schémata dalších vybraných radioaktivních izotopů jsou uvedena v příloze 3.

Například zářič <sup>60</sup>Co po emisi částic  $\beta_1$  přechází na <sup>60</sup>Ni v excitovaném stavu. Ten se zbavuje energie emisí fotonů  $\gamma_1$  záření s energií 1,173 MeV (na 100000 přeměn <sup>60</sup>Co připadá 99867 fotonů) a přechází na nižší energetickou hladinu. Jádra <sup>60</sup>Ni o této energetické hladině vznikají také emisí částic  $\beta_3$  s hraniční energií 1,48 MeV nebo emisí  $\beta_2$  částic s hraniční energií 0,657 MeV a následným vyzářením fotonů  $\gamma_2$  s energií 0,825 MeV (na 100000 přeměn <sup>60</sup>Co připadá 13 fotonů). Z nižší energetické hladiny jádra <sup>60</sup>Ni přecházejí na základní energetickou hladinu emisí fotonů  $\gamma_3$  záření s energií 1,33 MeV (na 100000 přeměn <sup>60</sup>Co připadá 100000 fotonů). Celkový výtěžek fotonů záření  $\gamma$  je tedy roven 99,867 + 100 + 0,013 = 199,88 %.

Korekce na absorpci záření. Korekce na absorpci záření je dána vztahem

$$f_{\rm a} = e^{\left[-\mu_m (m_{\rm sv} + m_{\rm s0} + m_{\rm sk})\right]} , \qquad (18)$$

kde  $\mu_m$  je hmotnostní součinitel absorpce pro daný typ a energii záření,  $m_{sv}$ ,  $m_{so}$ ,  $m_{sk}$  jsou příslušné plošné hmotnosti vzduchového sloupce mezi okénkem a preparátem, okénka (materiálu krytu citlivého objemu detektoru) a krytu preparátu.

Korekce na samoabsorpci  $f_s$  je korekce na absorpci záření v materiálu zářiče.

<u>Korekce na zpětný rozptyl</u>. Zpětný rozptyl, ke kterému dochází v důsledku rozptylu od podložky detektoru, zvyšuje četnost registrovaných částic, proto je koeficient  $f_{zr}$  větší jak jedna. Jeho hodnota se vždy nachází v intervalu 1 - 2, protože četnost částic, které se dostanou do citlivého objemu detektoru rozptylem od podložky, nemůže být větší než četnost částic

směřujících přímo z preparátu k detektoru. Pro záření  $\alpha$  a  $\gamma$  obvykle pokládáme  $f_{zr} = 1$ . Pro záření  $\beta^-$  je větší stupeň zpětného rozptylu vysvětlován silným odpuzováním částic  $\beta^-$  elektrony materiálu.

#### Postup měření:

- Stanovte účinnost scintilačního detektoru pomocí vztahu (16). (Nejdříve je nutné změřit rozdělení amplitud na výstupu detektoru a nastavit diskriminační úrovně jednokanálového analyzátoru pro registraci impulzů odpovídajících píku úplné absorpce - viz úloha "Měření spekter zářičů γ".) Registraci ionizujícího záření proveďte pro různé vzdálenosti detektoru a zářiče. Měření počtu impulzů proveďte s lepší statistickou přesností než 3 %. Proveďte korekci na pozadí, geometrii měření a rozpadové schéma.
- 2. Stanovte účinnost GM trubice pomocí vztahu (16). Registraci ionizujícího záření proveďte pro několik vzdáleností zářiče od detektoru. Měření počtu impulzů proveďte s lepší statistickou přesností než 3 %. Proveďte korekci na pozadí, geometrii měření a rozpadové schéma. Porovnejte naměřené účinnosti *f*<sub>u</sub> G-M detektoru a scintilačního detektoru.

Literatura: [1], [3]

#### 4. Ověření statistického charakteru přeměnového zákona

#### Cíl laboratorního cvičení:

Studium nejdůležitějších statistických rozdělení používaných v experimentální jaderné fyzice.

Pomůcky: Geiger-Müllerův detektor, počítač, zdroj vysokého napětí, radioaktivní zářiče.

#### Teoretický rozbor:

#### Binomické rozdělení

Procesy probíhající v mikrosvětě mají pravděpodobnostní charakter a mohou být správně pochopeny pouze při použití statistických metod. V experimentální jaderné fyzice se setkáváme s úkoly, které jsou spojeny s přímou registrací částic vznikajících v důsledku takových procesů, jako jsou radioaktivní rozpad, jaderné reakce, fotoefekt, atd. Společným rysem těchto procesů je jejich statistický charakter, mohou však být popsány pomocí různých statistických rozdělení.

Hlavní charakteristikou přeměnového procesu je pravděpodobnost  $\lambda$  rozpadu jádra za časovou jednotku. Zmíněná pravděpodobnost není závislá na vnějších faktorech (teplota, tlak,...), nezávisí na volbě počátku časové osy, ale je určena pouze velikostí časového intervalu *T*.

Statistika radioaktivního rozpadu je popsána matematickým modelem binomického rozdělení, který předpokládá vzájemnou statistickou nezávislost jednotlivých přeměn, konečný počet radioaktivních jader a absolutní nerozlišitelnost jader stejného typu. Binomické rozdělení určuje statistickou závislost mezi počtem radioaktivních jader *N*, středním počtem rozpadů  $\overline{k}$  za určitou dobu *T* a experimentálně pozorovaným počtem rozpadů *k* za tutéž dobu. Jinak řečeno, binomické rozdělení určuje pravděpodobnost  $p(k|\overline{k}, N)$  uskutečnění *k* rozpadů při zadaných hodnotách  $\overline{k}$  a *N*:

$$p(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \left(\frac{\overline{k}}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\overline{k}}{N}\right)^{N-k}.$$
(19)

První člen výrazu (19) charakterizuje vzájemnou nerozlišitelnost jader stejného typu. Zlomek  $\frac{\bar{k}}{N}$  vyjadřuje pravděpodobnost rozpadu jednoho jádra za dobu *T* a výraz  $\left(\frac{\bar{k}}{N}\right)^k$  určuje pravděpodobnost rozpadu *k* statisticky nezávislých jader. Poslední člen výrazu (1) určuje pravděpodobnost, že *N-k* jader se za dobu pozorování nerozpadne.

Binomické rozdělení musí být používáno při studiu excitovaných stavů s krátkou dobou života, kdy poločas přeměny je menší než doba pozorování, a při studiu soustav s konečným počtem radioaktivních jader, tj. v případech, kdy nelze počet jader považovat za nekonečný. <u>Poissonovo rozdělení</u>

Ve většině experimentů můžeme počet radioaktivních jader N považovat za nekonečně velký ( $N \rightarrow \infty$ ). V těchto případech se při konečném  $k \left(\frac{\overline{k}}{N} \rightarrow 0\right)$  výraz (19) zjednodušuje a binomické rozdělení limitně přechází ve známé Poissonovo rozdělení

$$p(k) = \frac{\bar{k}^{k} e^{-k}}{k!},$$

$$(1)$$

$$(\lim_{N \to \infty} \frac{N!}{(N-k)!k!} = \frac{N^{k}}{k!}, \quad \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{\bar{k}}{N}\right)^{N-k} = e^{-\bar{k}}.$$

$$(20)$$



Obr.7. Poissonovo rozdělení pro různé hodnoty k.

Poissonovo rozdělení (20) určuje pravděpodobnost p(k), že náhodná veličina (počet rozpadů, počet elektronů,...) nabývá hodnoty k. Poissonovo rozdělení závisí pouze na jednom parametru, střední hodnotě  $\overline{k}$  (obr. 7).

Tvar rozdělení je určen disperzí  $D_k$  náhodné veličiny. V případě Poissonova rozdělení je disperze rovna střední hodnotě  $\overline{k}$  ( $D_k = \overline{k}$ ) náhodné veličiny, což je jeho charakteristickým znakem.

Relativní chyba měření  $\delta_k$  je určena výrazem

$$\delta_k = \frac{\sqrt{D_k}}{\bar{k}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{k}}}.$$
(21)

Základním cílem většiny experimentů v jaderné fyzice je měření střední hodnoty náhodné veličiny  $\overline{k}$  a určení přesnosti tohoto měření. Z výrazu (21) vidíme, že přesnosti 99% dosáhneme pro  $\overline{k} = 10000$  (nebo např. přesnosti 97% odpovídá hodnota  $\overline{k} = 1000$ ).

#### Normální (Gaussovo) rozdělení

Analýza výrazu (20) graficky vyjádřená v obr. 7 ukazuje, že s růstem  $\overline{k}$  se rozdělení stává více symetrickým. Pro malé  $\overline{k}$  je rozdělení silně asymetrické (*k* nemůže nabývat záporných hodnot), při splnění podmínky  $\sqrt{\overline{k}} \gg 1$  se rozdělení úplně symetrizuje. Pravděpodobnosti blízkých *k* se nebudou příliš lišit a proto může být uskutečněn přechod od diskrétního rozdělení ke spojitému.

Při splnění podmínky  $\sqrt{k} >> 1$  z Poissonova rozdělení (20) dostaneme normální (Gaussovo) rozdělení (obr.8), které zaujímá dominantní postavení ve statistice mnoha fyzikálních procesů. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení je

$$f(k)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(k-k)^2}{2\sigma^2}} dk.$$
 (22)

Tento výraz určuje pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá hodnoty v intervalu  $\langle k, k+dk \rangle$ . Parametr rozdělení  $\sigma^2$  je jeho disperzí. Pro  $\sqrt{\overline{k}} >> 1$  platí stejně jako pro Poissonovo rozdělení  $\sigma^2 = \overline{k}$ . Pravděpodobnost, že náhodná veličina *k* nabývá hodnot z intervalu  $\langle k_1, k_2 \rangle$ , je určena integrálem

$$F(k_1 \le k \le k_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{k_1}^{k_2} e^{\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma^2}} dk .$$
 (23)

Výpočtem se můžeme přesvědčit, že normální náhodná veličina leží v intervalu  $\langle \overline{k} + \sigma, \overline{k} - \sigma \rangle$  s pravděpodobností

$$F(|k-\bar{k}| \le \sigma) = 0,682$$

obdobně

$$F(|k - \overline{k}| \le 2\sigma) = 0.954,$$
  
$$F(|k - \overline{k}| \le 3\sigma) = 0.997.$$

Tyto tři výrazy se nazývají "*pravidla 3* $\sigma$ " a slouží ke kvantitativnímu posouzení, zda je vhodné aproximovat neznámé rozdělení rozdělením normálním (Gaussovým).



Obr.8. Gaussovo rozdělení s parametry  $\overline{k} = \sigma^2 = 100$ .

#### Postup měření:

1. Nastavte parametry detekčního zařízení tak, aby počet částic registrovaných z radioaktivního zářiče byl průměrně 3-7 částic za 1 s a proveď te 1000 měření. Na základě

experimentálních dat najděte střední hodnotu  $\overline{k}$  a disperzi  $D_k (D_k = \overline{k^2} - \overline{k}^2)$ . K jejich výpočtu užijte vztahů  $\overline{k} = 1/n \sum_i n_i k_i$  a  $\overline{k^2} = 1/n \sum_i n_i k_i^2$ , ve kterých je  $n_i$  počet výskytů hodnoty  $k_i$  a  $n = \sum_i n_i$ . Ověřte platnost rovnosti  $\overline{k} = D_k$ . Za předpokladu správnosti Poissonova rozdělení vypočtěte teoretické pravděpodobnosti  $p_{\text{teor}}(k)$  registrace k částic (20). Výsledky shrňte do tabulky a grafu. Pomocí kritéria  $\chi^2$  (viz příloha) posuďte správnost hypotézy o totožnosti Poissonova rozdělení s experimentálním rozdělením, které jste obdrželi.

2. Proveďte 3000 měření s radioaktivním preparátem s velkým poločasem rozpadu, dobu měření zvolte tak, aby byla splněna podmínka  $\sqrt{\overline{k}} >> 1$ . Výsledky měření graficky znázorněte ve formě histogramů. Určete střední hodnotu  $\overline{k}$  a disperzi  $\sigma^2$ . Prověřte správnost rovnosti  $\sigma^2 = \overline{k}$ . Prověřte plnění "*pravidla*  $3\sigma$ ".

Literatura: [2], [3]

# 5. Měření poločasu rozpadu <sup>137</sup>Ba

#### Cíl laboratorního cvičení:

Určit poločas rozpadu <sup>137m</sup>Ba.

Pomůcky: Izogenerátor<sup>137m</sup>Ba, scintilační detektor, jednokanálový analyzátor, stopky

#### Teoretický rozbor:

Radioaktivitu můžeme definovat jako schopnost atomových jader některých izotopů samovolně se přeměňovat na jádra jiných druhů či typů při současné emisi záření  $\alpha$ ,  $\beta$  nebo  $\gamma$ . Zvláštním případem radioaktivity je samovolné štěpení jader na dva fragmenty za současné emise neutronů a uvolnění poměrně značné energie. Radioaktivní rozpady mohou být buď spontánní nebo vyvolané účinkem jiných částic či jader.

Je-li  $N_0$  počet radioaktivních jader určitého izotopu v čase t = 0, pak počet jader, které za dobu t nepodlehnou radioaktivní přeměně, je dán vztahem

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},\tag{24}$$

kde  $\lambda$  je přeměnová konstanta charakteristická pro daný izotop, která je definována jako pravděpodobnost rozpadu jádra za časovou jednotku. Intenzita záření množiny radioaktivních

jader je charakterizována průměrným počtem radioaktivních přeměn jader za jednotku času. Tato veličina se nazývá aktivitou

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N , \qquad [A] = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Bq}.$$
 (25)

Jednotkou aktivity je becquerel (*Bq*). Starší jednotkou je curie (Ci). 1 Ci odpovídá aktivitě 1 g <sup>226</sup>Ra (1 Ci = 3,7.10<sup>10</sup> Bq). Další významnou konstantou je poločas přeměny  $T_{1/2}$ , což je doba, za níž se původní počet radioaktivních jader daného izotopu sníží na polovinu. Dosazením do vztahu (24) dostaneme

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad . \tag{26}$$

Diferencováním vztahu (24) obdržíme vztah pro aktivitu

$$A = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \,, \tag{27}$$

která také exponenciálně klesá.

#### Měření poločasu rozpadu jader:

Jenom u radioaktivních jader jejichž poločas rozpadu je menší nebo srovnatelný s dobou měření (pozorování) můžeme zaznamenat pokles aktivity v průběhu experimentu. V tomto případě může být přeměnová konstanta určena pomocí měření závislosti aktivity vzorku na čase. Z výrazu (4) můžeme vyjádřit logaritmus aktivity

$$\ln(A) = \ln(A_0) - \lambda t, \tag{28}$$

který je lineární funkcí času. Z této závislosti může být určena jak přeměnová konstanta  $\lambda$  tak i poločas rozpadu.

U radioaktivních jader jejichž poločas rozpadu je mnohem větší než je doba experimentu se aktivita vzorku v průběhu experimentu prakticky nemění a výše popsaná metoda nemůže být použita k určení poločasu rozpadu. V tomto případě můžeme přeměnovou konstantu (poločas rozpadu) určit z absolutní aktivity měřeného vzorku při jeho známé hmotnosti. Avšak při určení absolutní aktivity vzorku je potřebné uvažovat účinnost reálného detektoru  $\varepsilon$ . Výpočet účinnosti detektoru  $\varepsilon$  je poměrně složitá úloha. Při použití dvou detektorů v koincidenčním zapojení se v některých případech můžeme vyhnout určení účinnosti detektoru.

Nechť se jádro A  $\beta$ -rozpadem přemění na jádro  $B^*$ , které následně vyzařuje fotony  $\gamma$ záření

$$A \xrightarrow{\beta} B^* \xrightarrow{\gamma} B$$
.

Je-li doba života excitovaného jádra  $B^*$  malá ve srovnání s dobou života jádra A, může být absolutní aktivita vzorku určena postupným měřením intenzity  $\beta$ ,  $\gamma$  záření a  $\beta\gamma$  koincidenčním měřením bez znalosti účinnosti detektorů. Jestliže se za dobu měření T ( $T << T_{1/2}$ ) v průměru rozpadá N jader, pak detektor  $\beta$  záření za tuto dobu zaznamená  $M_{\beta}$  událostí a detektor  $\gamma$  záření  $M_{\gamma}$  událostí a platí

$$M_{\beta} = \varepsilon_{\beta} N, \qquad M_{\gamma} = \varepsilon_{\gamma} N,$$
 (29)

kde  $\varepsilon_{\beta}$  a  $\varepsilon_{\gamma}$  jsou účinnosti detektoru  $\beta$  a  $\gamma$  záření. V případě, že jsou účinnosti detektorů statisticky nezávislé je počet  $\beta\gamma$  koincidencí roven

$$M_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta} \varepsilon_{\gamma} N . \tag{30}$$

Z výrazů (29) a (30) dostaneme

$$N = \frac{M_{\beta}M_{\gamma}}{M_{\beta\gamma}}.$$
(31)

Jestliže dobu měření *T* budeme považovat za časovou jednotku, bude počet rozpadů *N* roven aktivitě vzorku. Pro určení přeměnové konstanty  $\lambda$  musíme znát počet radioaktivních jader ve vzorku  $N_0$  ( $N = \lambda N_0$ ). Je-li známa hmotnost vzorku *m*, je počet radioaktivních jader ve vzorku rovna

$$N_0 = \frac{mN_A}{N_{AT}},\tag{32}$$

kde  $N_A$  je Avogadrovo číslo,  $N_{AT}$  je relativní atomová hmotnost zkoumaného izotopu. Poločas rozpadu pak může být vyjádřen

$$T_{1/2} = \ln 2 \frac{N_0}{N} \,. \tag{33}$$

#### Postup měření:

- 1. Do kovové misky ukápněte 1 ml roztoku z izogenerátoru <sup>137m</sup>Ba.
- Proměřte závislost aktivity vzorku v misce na čase. Měřte aktivitu každých 10 sekund, zvolte dobu měření 5 sekund.
- Získanou závislost aktivity na čase logaritmujte a stanovte metodou lineární regrese poločas rozpadu.

Literatura: [3], [4]

#### 6. Absorpce záření α v látce

**Cíl laboratorního cvičení:** Stanovit dosah alfa částic ve vzduchu při různých hodnotách jeho tlaku.

**Pomůcky:** zdroj alfa částic (např. <sup>241</sup>Am), polovodičový křemíkový detektor alfa částic, registrační přístroj, zařízení umožňující měnit vzdálenost zářiče od detektoru, zařízení, které umožní v oblasti zářiče a detektoru měnit tlak vzduchu, rotační vývěva.

#### **Teoretický rozbor:**

Alfa částice (jádra atomu  ${}_{2}^{4}$ He), stejně jako jiné těžké nabité částice (protony, deuterony, tritony, jádra atomu  ${}_{2}^{3}$ He apod.), na své cestě látkovým prostředím interagují především s elektrony atomů látky. Jejich interakce s jádry atomů jsou málo pravděpodobné. Alfa částice vysílané těžkými radioaktivními jádry mají počáteční kinetickou energii 4 - 6 MeV a tedy počáteční rychlost řádově 10<sup>7</sup> m·s<sup>-1</sup>. Setkávají se s elektrony, které se vzhledem k nim pohybují pomalu. Navíc jde o srážku těžké částice s lehkou, při níž může být těžká částice odchýlena od své původní trajektorie jen o velmi malý úhel. Alfa částice se tedy při průletu látkou pohybuje téměř přímočaře. Při každé srážce s elektronem však ztratí určitou malou část své kinetické energie, až se úplně zastaví. Kinetická energie alfa částice se spotřebovává na excitaci a ionizaci atomů látky.

Délka dráhy, kterou v látce urazí, se nazývá dosah. Dosah alfa částice závisí na její počáteční kinetické energii  $E_{k0}$ , na počtu elektronů  $n_e$  v objemové jednotce látky a na střední hodnotě energie (tzv. budicího potenciálu) potřebné k tomu, aby některý elektron v atomu látky přešel na vyšší energiovou hladinu nebo byl z atomu uvolněn. Měříme-li dosah alfa částic z monoenergetického zdroje v látce (např. ve vzduchu), počet alfa částic, které se za určitý časový interval dostanou do vzdálenosti r od zdroje, zůstává až do určité vzdálenosti téměř konstantní a pak při malém vzrůstu vzdálenosti r rychle klesne na nulu (obr. 9a).



Obr.9. a) Závislost relativního počtu alfa částic, které se za určitý časový interval dostanou do vzdálenosti *r* od zdroje, na vzdálenosti *r*.

b) Rozdělení dosahů monoenergetických částic alfa kolem hodnoty R<sub>S</sub>.

Z obrázku 9b je zřejmé, že dosah je velmi dobře definovaná veličina. Z vykreslené závislosti je vidět, že všechny alfa částice dolétly do přibližně stejné vzdálenosti  $R_S$  s relativně malým náhodným rozptylem. Rovnici křivky lze psát v gaussovském tvaru

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}r} = \frac{N_0}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(r - R_s\right)^2 / \alpha^2\right],\tag{34}$$

kde  $N_0$  je počet alfa částic vyslaných zdrojem za určitý časový interval, veličina  $\alpha$  se nazývá fluktuační parametr a charakterizuje šířku křivky. Bod  $R_S$ , ve kterém má křivka maximum, se nazývá střední lineární dosah. Mezi středním lineárním rozsahem  $R_S$  ve vzduchu a fluktuačním parametrem  $\alpha$  platí s přesností asi 10 % empirický vztah  $\alpha = 0,015 R_S$ . Někdy se stanovuje tzv. extrapolovaný dosah  $R_e$ , který dostaneme jako průsečík tečny ke křivce  $\frac{N(r)}{N_0}$  v

bodě [ $R_s$ ;0,5] a osy r.

Rozptyl v hodnotách dosahu je způsoben statistickým charakterem interakcí jednotlivých alfa částic s elektrony atomů látky. Při praktickém měření je rozptyl zatížen systematickou chybou způsobenou tím, že zářiče nejsou monoenergetické a že mají konečnou vlastní tloušťku (alfa částice, které vyletují z větších hloubek, ztratí už průchodem materiálem zářiče část své kinetické energie).

Měřením dosahu alfa částic lze určit jejich počáteční kinetickou energii, a to pomocí některého z empirických vztahů, které tyto veličiny svazují. Tak například mezi středním lineárním dosahem  $R_S$  alfa částic ve vzduchu za normálních podmínek (v cm) a jejich počáteční kinetickou energií  $E_{k0}$  (v MeV) platí Geigerův empirický vztah

$$R_{\rm S} = 0.318 \ {\rm E_{k0}}^{3/2}. \tag{35}$$

Vztah platí pro energie 4 až 7 MeV a dosahy v intervalu 3 až 7 cm.

Další empirická formule umožní ze změřeného dosahu alfa částic ve vzduchu za normálních podmínek vypočítat jejich střední hmotnostní dosah  $R_m$  v látkovém prostředí s hmotnostním číslem *A*:

$$R_{\rm m} \,[{\rm mg} \cdot {\rm cm}^{-2}] = 0.56 R_{\rm S} \,[{\rm cm}] \,A^{1/3}$$
 (36)

Střední hmotnostní dosah je definován vztahem

$$R_{\rm m} = \rho R_{\rm S},\tag{37}$$

kde  $\rho$  je hustota látkového prostředí.

#### Postup měření:

1. Změřte střední lineární dosah alfa částic z <sup>241</sup>Am za atmosférického tlaku. Vypočtěte pomocí Geigerova vztahu střední lineární dosah alfa částic z <sup>241</sup>Am ve vzduchu za normálních podmínek ze znalosti jejich počáteční kinetické energie a porovnejte jej s naměřenou hodnotou. Nakreslete graf v souladu s obr. 9a a ověřte, že pro rozptyl dosahu alfa částic ve vzduchu platí empirický vztah  $\alpha = 0.015 R_{\rm S}$ .

2. Změřte střední lineární dosah alfa částic z <sup>241</sup>Am pro několik hodnot tlaku vzduchu menších než je tlak atmosférický a vypočítejte pro vzduch hmotnostní dosah. Vzduch vyčerpávejte z oblasti zářiče a detektoru pomocí rotační vývěvy a jeho tlak měřte na připojeném vakuometru.

Literatura: [2]

#### 7. Interakce γ záření s látkou

#### Cíl laboratorního cvičení:

Studium základních mechanismů interakce  $\gamma$  záření s látkou. Určení energie  $\gamma$  záření absorpční metodou

**Pomůcky:** jednokanálový analyzátor, scintilační detektor se scintilátorem NaI(Tl), zářič <sup>137</sup>Cs, absorpční vzorky Al, Cu, Fe, Pb.

#### **Teoretický rozbor:**

#### Typy interakcí y záření s látkou

Při interakci γ záření s látkou v oblasti energií od 0,01 MeV do 10 MeV jsou nejpravděpodobnější tři jevy: fotoefekt, Comptonův rozptyl a vznik elektrono-pozitronových párů.

Při fotoefektu se všechna energie fotonu γ záření předává elektronu atomového obalu, ten je vytržen ze své orbity a odnáší s sebou kinetickou energii

$$E_{\rm e} = E_{\rm f} - A , \qquad (38)$$

kde *A* je vazebná energie elektronu (tzv. výstupní práce),  $E_f = hv$  je energie fotonu  $\gamma$  záření.

Při Comptonově jevu interaguje primární foton s volným nebo slabě vázaným elektronem vnějších obalových slupek atomu. Jeho energie  $E_f$  se rozděluje mezi elektron  $E_e$  a tzv. rozptýlený foton  $E_f$  v závislosti na úhlu  $\theta$ , který svírá směr rozptýleného a primárního fotonu. Platí vztah

$$E_{f}^{*} = \frac{E_{f}}{1 + (E_{f} / mc^{2})(1 - \cos\theta)}$$
(39)

Vznik elektrono-pozitronových párů při interakci fotonu s elektrickým polem elektronů nebo jader je možný pouze při velkých energiích  $\gamma$  záření. Všechna energie fotonu  $\gamma$  záření  $E_f$ je transformována na klidovou energii elektronu a pozitronu, kinetickou energii jejich pohybu  $E_k$  a na energii předanou jádru nebo elektronu, v jejichž elektrickém poli dochází ke vzniku elektron-pozitronového páru. Dojde-li ke vzniku elektronu a pozitronu v elektrickém poli jádra, je možné energii předanou jádru zanedbat a

$$E_{\rm f} = 2m_{0\rm e}c^2 + E_{\rm k}\,. \tag{40}$$

Je zřejmé, že vznik páru elektron-pozitron v elektrickém poli jádra je možný pouze pro  $E_{\rm f} \ge 2m_{0\rm e}c^2$ . Při vzniku elektron-pozitronového páru v elektrickém poli elektronu nelze zanedbat předanou energii a hraniční energie se zvyšuje na  $4m_{0\rm e}c^2$ .

Fotoefekt	$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{F}} \approx \rho Z^{5} (E_{\mathrm{f}})^{-7/2}$
Comptonovský efekt	$\sigma_{\rm C} \approx \rho(E_{\rm f})^{-1}$
Tvorba párů	$\sigma_{P} \approx \rho Z^{2} \ln(E_{f})$

Účinné průřezy jednotlivých interakcí





Obr.10. Závislost účinných průřezů příslušných interakcí na energii γ záření.

#### Absorpce y záření látkou

Paralelní monoenergetický svazek  $\gamma$  záření s energií  $E_{\rm f}$  se bude vlivem výše uvedených jevů (fotoefekt, Comptonův rozptyl, vznik párů elektron-pozitron) při průchodu látkou zeslabovat. Při fotoefektu a vzniku párů elektron-pozitron fotony  $\gamma$  záření zanikají. Při Comptonově rozptylu se odchylují od původního směru a zmenší svou energii.

Nechť I<sub>0</sub> je intenzita monoenergetických fotonů  $\gamma$  záření dopadajících ve směru osy x na absorber. Intenzita  $\gamma$  záření, které prošlo prostředím absorberu aniž by s ním interagovalo, závisí exponenciálně na tloušťce absorberu *d* 

$$I = I_0 e^{-\mu d} , \qquad (41)$$

kde  $\mu$  je tzv. lineární absorpční koeficient  $\gamma$  záření, který může být v souladu se třemi hlavními typy interakcí  $\gamma$  záření s látkou zapsán ve tvaru  $\mu = \mu_f + \mu_c + \mu_p$ . Každý ze tří lineárních absorpčních koeficientů je úměrný příslušným účinným průřezům

$$\mu_{\rm f} = N\sigma_{\rm f}, \ \mu_{\rm c} = N\sigma_{\rm c}, \ \mu_{\rm p} = N\sigma_{\rm p}, \tag{42}$$

kde *N* je počet atomů v jednotkovém objemu látky. Častěji než lineární absorpční koeficient se používá hmotnostní absorpční koeficient  $\mu_m$ 

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho},\tag{43}$$

kde  $\rho$  je hustota látky. Absorpční zákon může být pomocí hmotnostního absorpčního koeficientu zapsán ve tvaru

$$I = I_0 e^{-\mu_m m_s} , (44)$$

ve kterém je  $m_s = \rho d$  plošná hmotnost absorberu udávaná v kg/m<sup>2</sup>. Závislost hmotnostního absorpčního koeficientu na energii  $\gamma$  záření je podobná závislosti účinného průřezu na energii  $\gamma$  záření (obr. 10).

Kromě součinitele zeslabení se absorpce prostředí charakterizuje polotloušťkou  $d_{1/2}$ , což je tloušťka prostředí potřebná ke snížení intenzity dopadajícího záření na polovinu. Velikost polotlouštky je dána výrazem

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}.$$
 (45)

Analogicky s hmotnostním součinitelem zeslabení lze absorpci charakterizovat i hmotnostní polotloušťkou

$$m_{1/2} = \frac{\rho \ln 2}{\mu}.$$
 (46)

Hmotnostní absorpční koeficient může být určen experimentálně. Při realizaci takového měření je potřebné registrovat pouze fotony  $\gamma$  záření, které neinteragovaly s absorberem. Proto je nutné nastavit diskriminační hladiny jednokanálového analyzátoru tak, aby registrační zařízení zaznamenávalo pouze impulsy odpovídající píku úplné absorpce. Je-li známa hmotnostní polotloušťka pro dva různé materiály absorberů, je jednoznačně určena energie  $\gamma$  záření (obr. 11).



Obr. 11. Závislost hmotnostní polotloušťky na energii γ záření.

#### Postup měření:

- Změřte amplitudové spektrum zářiče <sup>137</sup>Cs. Určete polohu píku úplné absorpce a nastavte diskriminační hladiny jednokanálového analyzátoru pro registraci impulzů odpovídajících píku úplné absorpce (podrobně popsáno v úloze "9. Měření spekter zářičů γ").
- 2. Změřte počet registrovaných částic bez přítomnosti absorberu.
- 3. Mezi zářič a detektor vkládejte absorbery o různých tloušťkách a pro každou tloušťku určete počet registrovaných částic. Vypočtěte hmotnostní absorpční koeficient  $\mu_m$  a hmotnostní polotloušťku m<sub>1/2</sub>. Užijte metody lineární regrese.
- 4. Opakujte body 3 a 4 pro ostatní druhy absorberů. Použijte hodnoty hustot absorberů:  $\rho_{Al} = 2698 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{Cu} = 8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{Fe} = 7874 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{Pb} = 11350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
- Sestrojte graf závislosti počtu registrovaných částic na tloušťce absorberu pro různé materiály. Svislou osu naneste v logaritmickém měřítku.
- 6. Pomocí obr.11 určete energii γ záření.

Literatura: [2]

#### 8. Studium elektrono-pozitronové anihilace

#### Cíl laboratorního cvičení:

Experimentální pozorování anihilace elektronů a pozitronů. Určení energie fotonů záření  $\gamma$  vznikajících při anihilaci elektronů a pozitronů. Přesvědčit se, že při anihilaci elektronu a pozitronu vznikají dva fotony.

**Pomůcky:** scintilační detektor, mnohokanálový analyzátor, radioaktivní zářiče <sup>137</sup>Cs ( $E_{\gamma} = 662 \text{ keV}$ ), <sup>152</sup>Eu ( $E_{\gamma} = 120 \text{ keV}$ ), <sup>22</sup>Na.

#### Teoretický rozbor:

Anihilace elektronu s pozitronem je popsána rovnicí

$$e^{-} + e^{+} \rightarrow 2 hv.$$
 (47)

Energie uvolněná při anihilaci elektronu a pozitronu je určena součtem klidové energie elektronu a pozitronu a je rovna 1,022 MeV. Při anihilaci elektronu a pozitronu vznikají v souladu s rovnicí (47) dva fotony  $\gamma$  záření, každý s energií 0,511 MeV. Energie těchto fotonů  $\gamma$  záření může být určena pomocí  $\gamma$  spektrometru.

#### Energetická kalibrace scintilačního spektrometru záření y

Energetickou kalibrací rozumíme určení vztahu mezi amplitudou scintilačních impulzů příslušejících píku úplné absorpce a energií měřených fotonů. Amplituda těchto impulzů může být vyjádřena v jednotkách elektrického napětí, nebo číslem registračního kanálu, v němž jsou registrovány právě impulzy odpovídající úplné absorpci. Pro určení hledané závislosti je nutné použít monoenergetických zářičů se známou energií emitovaných fotonů. Obvykle je touto závislostí přímka, která nemusí procházet počátkem souřadnic a závislost má potom tvar

$$E_{\rm f} = aH + b\,,\tag{48}$$

kde  $E_{\rm f}$  je energie primárních fotonů, H je číslo kanálu (amplituda napětí) maxima odpovídajícího píku úplné absorpce, a, b jsou hledané konstanty spektrometru. Je-li  $\gamma$ spektrometr kalibrován, je možné z polohy píku úplné absorpce stanovit hledanou energii fotonů detekovaných scintilačním spektrometrem. Grafická ukázka kalibrace spektrometru užitím monoenergetických zářičů <sup>152</sup>Eu a <sup>137</sup>Cs se známou energií emitovaných fotonů je na obr. 12.



Obr. 12. Příklad energetické kalibrace spektrometru užitím dvou monoenergetických zářičů se známou energií fotonů:  $E_{\rm f}$  (<sup>152</sup>Eu) = 120 keV,  $E_{\rm f}$  (<sup>137</sup>Cs) = 662 keV. Polohy píků úplné absorpce:  $H(^{152}\text{Eu}) = 25 \text{ V}, H(^{137}\text{Cs}) = 350 \text{ V}, H(^{22}\text{Na}) = 275 \text{ V}.$  Na kalibrační přímce najdeme hodnotu  $E_{\rm f}(^{22}\text{Na}) = 537 \text{ keV}.$ 

#### Postup měření:

- Pomocí diferenciálních amplitudových spekter zářičů <sup>137</sup>Cs, <sup>152</sup>Eu proveďte energetickou kalibraci spektrometru. Pro měření spekter je možné užít jednokanálového analyzátoru, který pracuje v diferenciálním režimu. Nastavte vhodnou hodnotu horní diskriminační hladiny (jedná se o šířku diskriminačního okna, např. HL = 30 V) a sledujte závislost četnosti fotonů registrovaných spektrometrem na amplitudě napěťových impulsů vyjádřených hodnotou dolní diskriminační hladiny LL (měří se tedy v okně s hraničními hodnotami LL, LL+HL)
- 2. Jádro <sup>22</sup>Na se rozpadem  $\beta^+$  (vyzáření pozitronu) mění na <sup>22</sup>Ne v excitovaném stavu, které při přechodu do základního energetického stavu emituje záření  $\gamma$  o energii 1,275 MeV. Pozitrony vznikající při tomto rozpadu mohou interagovat s elektrony (anihilace pozitronů) za vzniku dvou fotonů  $\gamma$  záření. Z diferenciálního přístrojového spektra <sup>22</sup>Na určete energii těchto fotonů.

Literatura: [1], [3], [4]

#### 9. Měření spekter zářičů γ

#### Cíl laboratorního cvičení:

Seznámení se s prací jednokanálového a mnohokanálového amplitudového analyzátoru, studium základních charakteristik γ spektrometru, měření spekter zářičů γ.

**Pomůcky:** Scintilační detektor, jednokanálový a mnohokanálový analyzátor, radioaktivní zářiče <sup>137</sup>Cs, <sup>60</sup>Co, <sup>152</sup>Eu ( $E_f = 120 \text{ keV}$ ), <sup>57</sup>Co.

#### Teoretický rozbor:

#### Spektrometr záření y

Spektrometry záření  $\gamma$  (obr. 13) jsou přístroje určené k měření energetického rozdělení záření  $\gamma$ . Detektorem  $\gamma$  záření může být scintilační, polovodičový nebo plynový proporcionální detektor. Nejrozšířenější jsou scintilační detektory, ve kterých je energie záření  $\gamma$  pomocí tzv. scintilátoru transformována v záblesky světelného záření, které jsou následně detekovány vhodným světelným čidlem (fotonásobič, fotodioda). Scintilátory mohou být zhotoveny jak z anorganických (NaI, ZnS), tak i z organických materiálů (naftalín, antracen, aromatické uhlovodíky).

#### Scintilační detektory

Základními prvky scintilačního detektoru jsou scintilátor a optický detektor. Vlastním čidlem je scintilátor, což je luminiscenční látka, v níž dopadající záření způsobuje ionizaci a excitaci atomů a molekul. Deexcitace je doprovázena emisí světla, jehož intenzita odpovídá energii, kterou detekovaná částice ztratila při interakci se scintilátorem.

Scintilátor vyzařuje světelné záblesky do nahodilých směrů a proto je často doplněn reflektorem, který luminiscenční záření usměrňuje na aktivní plochu optického detektoru (např. na fotokatodu fotonásobiče).



Obr.13. a) Jednokanálový scintilační γ spektrometr (diferenciální diskriminátor je zařízení, které na výstup propouští pouze ty impulzy, jejichž amplituda leží v intervalu mezi dolní a horní diskriminační hladinou, rozdíl těchto hladin nazýváme diskriminačním oknem).

b) Mnohokanálový scintilační γ spektrometr (vrcholový detektor - analogová paměť vrcholu impulzu, analogově-digitální převodník převede na číslo amplitudu impulzu, toto číslo je použito jako adresa paměťové buňky, jejíž obsah se zvětší o jedničku).

Průběh detekce ve scintilačním detektoru lze rozdělit do následujících fází:

- 1. absorpce energie ionizujícího záření ve scintilátoru,
- 2. přenos absorbované energie na luminiscenční centra
- 3. emise luminiscenčního záření,
- 4. sběr fotonů emitovaných scintilátorem fotokatodou fotonásobiče,
- 5. emise fotoelektronů z fotokatody
- 6. zesílení fotoproudu ve fotonásobiči systémem dynod využitím sekundární emise

32

 výstupní proudový impulz na anodě fotonásobiče, jehož amplituda odpovídá energii detekované částice.

*Anorganické scintilátory* - velké množství anorganických materiálů má scintilační vlastnosti, největší praktický význam mají halogenidy alkalických kovů např. NaI, CsI, LiI, které obsahují malé množství aktivátorů (okolo 0,1 %, např. Tl, Na). Velký význam mají také krystaly ZnS:Ag, CaF2:Eu. Scintilační vlastnosti mají i některé druhy skel.

Scintilační proces v anorganických krystalech ještě není úplně objasněn a pro různé typy krystalů může být různě popsán. Nejvíce byly prozkoumány vlastnosti halogenidů alkalických kovů. Podívejme se na pásový model takového krystalu. Uvnitř zakázané zóny mohou být diskrétní elektronové energetické hladiny spojené s vybuzenými stavy iontů aktivátoru nebo s jinými příměsmi případně spojené s poruchami krystalické mřížky. Při průchodu nabité částice krystalem se předává energie částice zejména elektronům, které mohou získat energii dostatečnou pro přechod do vodivostního pásu. Při tomto přechodu se ve valenčním pásu objeví díra. Elektron i díra mohou volně a nezávisle prostupovat krystalem a tím přispívají ke zvýšení elektrické vodivosti krystalu. Tento proces je možné považovat za ionizaci. Je možný také druhý proces, kdy elektron z valenčního pásu získá energii nedostatečnou pro přechod do vodivostního pásu, pak zůstává svázán s dírou, pak hovoříme o excitonovém páru. Exciton se může také volně pohybovat krystalem, nenese však elektrický náboj a neovlivňuje elektrickou vodivost krystalu.

Přechod z excitovaných energetických stavů do základního může probíhat různými způsoby:

- Nezářivé přechody energie absorbovaná krystalem přispívá k tepelnému pohybu, tyto přechody jsou málo pravděpodobné, protože šířka zakázaného pásu je podstatně větší než energie tepelného pohybu elektronů. Se zvýšením teploty krystalu pravděpodobnost nezářivých přechodů exponenciálně vzrůstá.
- 2. Zářivé přechody, ke kterým dochází při rekombinaci elektronů a děr nebo anihilaci excitonů. Tyto přechody však nemohou být základním mechanismem scintilačního procesu, jelikož spektrum vznikajícího záření se překrývá se spektrem absorpce krystalu, vzniklé fotony jsou tedy s velkou pravděpodobností opět pohlceny a vzniká exciton. Tyto přechody však zajišťují přenos energie krystalem.
- Luminiscence. Energie elektron-děrových párů a excitonů je využita k excitaci aktivátorových hladin v zakázaném pásu. Scintilační fotony vznikají při deaktivaci těchto hladin (obr. 14). Spektrum luminiscence nezávisí na způsobu buzení krystalu a na

koncentraci aktivátoru. Množství fotonů vzniklých při scintilaci a doba doznívání luminiscence je závislá na koncentraci aktivátoru.



Obr. 14. Pásový model aktivovaného alkalického scintilátoru.

#### Scintilační spektrometrie y záření

Spektrometrie  $\gamma$  záření slouží ke stanovení energie fotonů  $\gamma$  záření interagujících se scintilátorem, případně pak ze znalosti této energie k určení typu radionuklidu a ze znalosti účinnosti detektoru pro detekci záření o dané energii i ke zjištění aktivity tohoto zářiče. K tomu je nutné správně interpretovat naměřené (instrumentální) diferenciální amplitudové spektrum. Toto tzv. přístrojové spektrum má složitější tvar než energetické rozdělení fotonů dopadajících na detektor. Tvar přístrojového spektra je ovlivněn interakčními mechanismy  $\gamma$  záření s materiálem detektoru. Při interakci  $\gamma$  záření s látkou se uplatňují tři mechanismy:

#### a) Fotoefekt

Při fotoefektu se všechna energie fotonu  $\gamma$  záření předává elektronu atomového obalu, ten je vytržen ze své orbity a odnáší ve formě kinetické energie energii

$$E_{\rm e} = E_{\rm g} - A \tag{49}$$

kde *A* je vazebná energie elektronu,  $E_e$ ,  $E_f$  - energie elektronu a fotonu  $\gamma$  záření. Atom, z jehož obalu byl elektron vyražen, emituje buď charakteristické rentgenové záření (které může být opět absorbováno fotoefektem, nebo může ze scintilátoru uniknout) nebo Augerovy elektrony, které jsou vzhledem ke své nízké energii vždy ve scintilátoru zabržděny.

Absorpcí fotoelektronu a vybuzeného charakteristického rentgenového záření nebo Augerových elektronů vznikají v různých místech scintilátoru prakticky současně dvě scintilace. Ty jsou fotonásobičem vyhodnoceny jako jedna scintilace odpovídající součtu jejich intenzit a tedy i součtu energií jednotlivých částic. Odpovídající impulzy na výstupu fotonásobiče vytváří v přístrojovém spektru **pík úplné absorpce**, jehož poloha odpovídá  $E_g$ . Právě tento pík je nositelem žádané spektrometrické informace.

Opustí-li fotony charakteristického rentgenového záření prvků detektoru scintilátor, aniž by s ním interagovaly, je celková energie scintilace o tuto energii menší a v přístrojovém spektru je patrný tzv. **únikový pík**. Ten je posunut od píku úplné absorpce směrem k nižším energiím právě o energii uniklého charakteristického záření. U scintilátorů NaI(Tl) je tento posun okolo 29 keV a je způsoben únikem charakteristického záření jodu. Únikový pík je pozorovatelný při energiích  $E_g < 120$  keV, kdy primární fotony interagují převážně v povrchové vrstvě scintilátoru, ze které je ještě únik charakteristického záření pravděpodobný, dopadající fotony vyšších energií interagují v takové vzdálenosti od povrchu krystalu, že k úniku vybuzeného charakteristického záření prakticky nedochází.

#### b) Comptonův efekt

Při tomto jevu interaguje primární foton s volným nebo slabě vázaným elektronem vnějších obalových slupek atomu. Jeho energie  $E_f$  se rozděluje mezi elektron  $E_e$  a tzv. rozptýlený foton  $E'_f$  v závislosti na úhlu  $\Theta$ , který svírá směr rozptýleného a primárního fotonu. Platí

$$E_{\rm f}^{'} = \frac{E_{\rm f}}{1 + (E_{f} / mc^{2})(1 - \cos\Theta)},$$
(50)

$$E_{\rm e} = E_{\rm f} - E_{\rm f}' = E_{\rm f} \frac{(E_{\rm f} / mc^2)(1 - \cos\Theta)}{1 + (E_{\rm f} / mc^2)(1 - \cos\Theta)} .$$
(51)

Energetický rozsah  $E_e$  závisí na úhlu rozptylu a pokrývá interval od nuly (pro  $\Theta = 0$ ) až do prahové energie  $E_{emax}$  Comptonova elektronu (pro  $\Theta = 180^\circ$ ) dané vztahem

$$E_{\rm emax} = \frac{E_{\rm f}}{1 + \left(mc^2 / 2E_{\rm f}\right)} \,. \tag{52}$$

Výpočtem limity pro  $E_{\rm f} \rightarrow \infty$  dostaneme

$$E_{\rm emax} \le (E_{\rm f} - mc^2/2) \approx (E_f - 0.25 \,{\rm MeV}).$$

Úhel rozptylu Comptonova elektronu leží v intervalu <0°,90°> vzhledem k trajektorii primárního fotonu. Comptonovské elektrony jsou ve scintilátoru zabržděny a vyvolají scintilace úměrné svým energiím, rozptýlené fotony ale nemusí interagovat a mohou z detektoru uniknout. Comptonovské elektrony vytváří ve spektru scintilačních odezev tzv. **Comptonovské kontinuum**. Kontinuum je spojité, začíná od nuly a končí Comptonovskou

hranou, odpovídající svojí polohou  $E_{emax}$ . Jsou-li rozptýlené fotony po prvním či opakovaném Comptonově rozptylu nakonec absorbovány ve scintilátoru fotoefektem, je sumární scintilační odezva úměrná  $E_{f}$  a přispívá k tvorbě píku úplné absorpce.

#### c) Tvorba elektrono-pozitronových párů

Nutnou podmínkou vzniku páru elektron - pozitron je  $E_f \ge 2mc^2 \approx 1,022 \text{ MeV}$ . Kinetická energie páru (1,022 MeV) je při jeho zabrzdění předána scintilátoru. Dvě anihilační kvanta, každé s energií 0,511 MeV, mohou se scintilátorem interagovat buď přímo fotoefektem nebo jedno či vícenásobným Comptonovým rozptylem. V prvním případě je scintilační odezva úměrná energii primárního fotonu a je započtena do píku úplné absorpce. Je-li absorbováno pouze jedno anihilační kvantum a druhé unikne, odpovídá scintilace energii ( $E_f$  - 0,511) MeV a ve spektru je patrný **první anihilační pík**. V případě úniku obou kvant ve spektru pozorujeme **druhý anihilační pík**, který odpovídá energii ( $E_f$  - 1,022) MeV. U malých scintilátorů je únik anihilačních kvant více pravděpodobný a proto anihilační píky jsou ve spektru výraznější než při použití velkých scintilátorů. Dobře pozorovatelné jsou anihilační píky při detekci záření o energii  $E_f > 2,5 \text{ MeV}$ , kdy je tvorba párů dominantní interakcí.

Účinné průřezy jednotlivých interakcí

Fotoefekt	$\sigma_{\rm F} \approx \rho Z^5 (E_{\rm f})^{-7/2}$
Comptonovský efekt	$\sigma_{\rm C} \approx \rho(E_{\rm f})^{-1}$
Tvorba párů	$\sigma_{\rm P} \approx \rho Z^2 \ln(E_{\rm f})$

( $\rho$  je hustota a Z efektivní protonové číslo scintilátoru)

#### Relativní energetická rozlišovací schopnost

Statistický charakter procesů převodu energie absorbované scintilátorem na napěťový impulz způsobuje, že amplitudové rozdělení napěťových impulzů odpovídá energetickému rozdělení fotonů s limitovanou přesností. I když se scintilátoru předá tatáž energie, na výstupu fotonásobiče se objevují impulzy nestejné amplitudy, jejichž množina vytváří amplitudové rozdělení (většinou Gaussovo). Toto rozdělení je charakterizováno bezrozměrovou veličinou, která se nazývá relativní rozlišovací schopnost. Rozlišení  $R_{1/2}$  je definováno jako poměr šířky rozdělení na polovině výšky rozdělení  $N_{1/2}$  a střední amplitudy impulzů, tedy vztahem

$$R_{1/2} = \frac{\Delta U}{U} 100\% , \qquad (53)$$

kde U je střední amplituda,  $\Delta U$  šířka rozdělení na polovině jeho výšky. Relativní energetická rozlišovací schopnost charakterizuje minimální rozdíl energií 2 částic, který může být spektrometrem rozlišen. Energetické rozlišení scintilačního spektrometru je nepřímo úměrné  $\sqrt{E_f}$ .



Obr. 15. Amplitudové spektrum zářiče <sup>137</sup>Cs.

U nejčastěji používaného scintilátoru NaI(Tl) se energetické rozlišení pro energie od 100 keV do 10 MeV pohybuje v intervalu 4 - 12 %. Pro měření amplitudového rozdělení výstupních impulzů detektoru se používá jednokanálový nebo mnohokanálový amplitudový analyzátor, pomocí kterých se diskretizuje energetická osa, tj. rozdělí se na intervaly téže délky nazvané kanály. Šířka kanálu je základní charakteristikou amplitudového analyzátoru. V experimentech se měří počet impulzů v každém kanálu, typický výsledek takového měření je ukázán na obr. 15. Relativní energetická rozlišovací schopnost může být v tomto případě vypočtena ze vztahu

$$R_{1/2} = \frac{\Delta k}{k} 100\%, \qquad (54)$$

kde  $\Delta k$  je počet kanálů odpovídající pološířce amplitudového rozdělení, *k* je číslo kanálu odpovídající středu rozdělení. Přesnost určení  $R_{1/2}$  je dána přesností určení  $\Delta k$ .

#### Úkoly pro měření:

1. Změřte amplitudové spektrum zářiče <sup>137</sup>Cs pomocí jednokanálového a mnohokanálového analyzátoru.

- Proveď te energetickou kalibraci a rozbor těchto přístrojových spekter. Najděte polohu píku úplné absorpce, comptonovské kontinuum ukončené Comptonovou hranou, pík zpětného rozptylu.
- 3. Určete relativní energetickou rozlišovací schopnost obou spektrometrů pro <sup>137</sup>Cs.
- 4. Změřte amplitudové spektra <sup>60</sup>Co, <sup>152</sup>Eu, <sup>57</sup>Co pomocí mnohokanálového analyzátoru a proveď te jejich rozbor.

Literatura: [1] - [4]

# 10. Experimentální pozorování Mössbauerova jevu a hyperjemných interakcí

**Cíl laboratorního cvičení:** Pomocí Mössbauerova spektrometru v režimu konstantní rychlosti zaznamenat Mössbauerovo spektrum na jádrech <sup>57</sup>Fe ve vzorku  $NH_4MgFe(CN)_6$ , LiFePO<sub>4</sub> (dublet) a Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (sextet) a z těchto spekter určit parametry hyperjemných interakcí.

**Pomůcky:** Mössbauerův spektrometr, vzorky NH<sub>4</sub>MgFe(CN)<sub>6</sub>, LiFePO<sub>4</sub>, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, železné piliny, hliníkový filtr.

#### Teoretický rozbor:

V roce 1958 německý fyzik Rudolf Mössbauer objevil jev bezodrazové rezonanční emise a absorpce γ záření jádry, který dnes nazýváme Mössbauerovým jevem. Tento jev je podrobně teoreticky popsán v řadě monografií [5] - [7], stručný výklad můžeme najít v [8].

Nechť volné jádro o hmotnosti M a hybnosti  $\vec{p}$  emituje foton  $\gamma$  záření o energii E a hybnosti  $h\vec{k}$  (h - Planckova konstanta,  $\vec{k}$  - vlnový vektor). V důsledku zákona zachování hybnosti jádro získá dodatečnou hybnost zpětného rázu  $h\vec{k}$ . Změna energie fotonu  $\gamma$  záření  $\Delta E$  je určována změnou kinetické energie jádra  $\Delta E_k$  při emisi  $\gamma$  záření

$$\Delta E = \Delta E_k = \frac{\left(\vec{p} - h\vec{k}\right)^2}{2M} - \frac{p^2}{2M} = \frac{\left(h\vec{k}\right)^2}{2M} - \frac{h\left(\vec{p} \cdot \vec{k}\right)}{M}.$$
(55)

První člen ve vztahu (55)

$$E_R = \frac{\left(h\vec{k}\right)^2}{2M} = \frac{E^2}{2Mc^2}$$
(56)

popisuje změnu energie  $\gamma$  záření v důsledku zpětného rázu. Energie fotonu vyzářeného volným jádrem  $E^{e}$  je v prvním přiblížení menší o  $E_{R}$  než je rozdíl energií excitovaného a základního stavu jádra  $E_{p}=E_{1}-E_{0}$  ( $E_{1}$ ,  $E_{0}$  jsou energie excitovaného a základního stavu). Analogický výsledek dostaneme při absorpci  $\gamma$  záření volným jádrem, kdy energie absorbovaného fotonu je  $E^{a} = E_{p}-E_{R}$ . Emisní a absorpční čáry jsou vzájemně posunuty o hodnotu  $2E_{R}$ . Druhý člen výrazu (55) popisuje Dopplerův posun při tepelném pohybu jádra. Je-li rozdělení rychlostí atomů maxwellovské, mají emisní a absorpční čáry formu Maxwellova rozdělení se šířkou  $D = 2\sqrt{E_{R}k_{0}T}$ , kde  $k_{0}$  je Boltzmanova konstanta a T je absolutní teplota.

V případě, kdy je jádro vázáno v krystalu, hybnost zpětného rázu se předává celému krystalu a ve vztahu (55) se  $M \rightarrow \infty$ . Odtud plyne, že  $E_R \rightarrow 0$  a  $D \rightarrow 0$ . Emisní a absorpční čáry nejsou posunuty a vzrůstá pravděpodobnost, že foton emitovaný jedním jádrem bude rezonančně absorbován jiným jádrem téhož izotopu.

#### Experimentální pozorování Mössbauerova jevu

Pro pozorování bezodrazové rezonanční emise a absorpce  $\gamma$  záření je kromě nenulové pravděpodobnosti tohoto jevu nutná totožnost energetických stavů mössbauerovských jader ve zdroji  $\gamma$  záření (zářiči) a v absorberu tohoto záření. Tato totožnost je porušena, jestliže energetické stavy mössbauerovských jader v zářiči a absorberu jsou různé, tj. například zářič i absorber mají různé chemické formy, nachází se v různých magnetických polích, mají různou teplotu apod. Splnění rezonačních podmínek se dosahuje změnou energie emitovaného nebo absorbovaného fotonu  $\gamma$  záření pomocí relativního pohybu zářiče a absorberu rychlostí *v*. Modulace energie  $\gamma$  záření je v souladu s Dopplerovým jevem určena výrazem

$$\Delta E_{v} = \frac{v \cdot E}{c} \cdot \cos(\alpha) \quad , \tag{57}$$

kde *c* je rychlost světla,  $\alpha$  je úhel mezi směrem rychlosti pohybu a směrem emise fotonu  $\gamma$  záření. Modulací energie  $\gamma$  záření se mění překrytí emisního a absorpčního spektra a tím velikost rezonační absorpce  $\gamma$  záření. Pro <sup>57</sup>Fe potřebné rychlosti pohybu leží v intervalu od setin do desítek milimetrů za sekundu. Nejjednodušší experimentální zařízení pro měření Mössbauerových spekter je ukázáno na obr. 14.



Obr.14. Struktura Mössbauerova spektrometru

Detektorem je měřena intenzita  $\gamma$  záření prošlého absorberem v závislosti na relativní rychlosti pohybu zářiče a absorberu. Tato závislost se nazývá Mössbauerovým spektrem. Minimum v tomto spektru odpovídá rezonanční absorpci  $\gamma$  záření, která nastává při určité rezonanční rychlosti  $v_{rez}$  vzájemného relativního pohybu zářiče a absorberu. Velikost rezonanční absorpce se charakterizuje veličinou

$$\mathcal{E}(v) = \frac{I(\infty) - I(v)}{I(\infty)} \quad , \tag{58}$$

kde I(v) je intenzita záření procházejícího absorberem při rychlosti v,  $I(\infty)$  je intenzita záření procházejícího absorberem mimo rezonanci (velká rychlost pohybu zářiče).

#### Mössbauerův spektrometr s konstantní rychlostí

Ve spektrometrech s konstantní rychlostí pohybu zdroje záření se používá obdélníkový průběh rychlosti pohybu zářiče. Zářič se polovinu periody pohybuje konstantní rychlostí směrem k absorberu (kladná rychlost), druhou polovinu periody stejnou konstatní rychlostí směrem od absorberu (záporná rychlost). Při použití tohoto způsobu měření se Mössbauerovo spektrum měří bod po bodu pro různé rychlosti pohybu zářiče. Každým dílčím měřením získáme současně dva body spektra, jeden pro kladnou a druhý pro zápornou rychlost.

#### Hyperjemné interakce jader

Hyperjemnými interakcemi se nazývají elektro-magnetické interakce jádra s okolními elektrony a ionty. Obecně tyto interakce vyvolávají změnu atomových i jaderných energetických hladin. Přímou metodou výzkumu těchto interakcí je studium atomových a

jaderných spekter. Pro energii  $\gamma$  záření  $10^5$  eV je typická hodnota energií hyperjemných interakcí  $10^{-7}$  eV. Pro pozorování hyperjemných interakcí je proto nutné energetické rozlišení  $\gamma$  spektrometru okolo  $10^{-12}$ . Tohoto rozlišení bylo dosaženo až objevem Mössbauerova jevu.

#### Monopolní interakce, izomerní (chemický) posun

Monopolní interakce jádra konečných rozměrů je určena především *s*-elektrony (elektrony s nulovým orbitálním momentem), které pronikají dovnitř jádra. Ukazuje se, že podstatnou roli hrají nepřímé interakce, jejichž příčinou je stínění jádra elektrony *p* a *d*, které se s určitou pravděpodobností nachází uvnitř "orbit" *s*-elektronů a mění veličinu elektronové hustoty  $|\psi(0)|^2$ , která charakterizuje elektronové okolí jádra. To je důležité především pro elektrony, které se podílejí na chemických vazbách.



Obr.15. Změna energetických hladin jader v zářiči a absorberu při monopolní interakci.

Monopolní interakce vyvolávají posun energetických hladin jádra (obr. 15), který se při měření projevuje změnou energie emitovaných a absorbovaných fotonů  $\gamma$  záření. Energie  $E_{\gamma}^{e}$  emitovaného fotonu  $\gamma$  záření může být vyjádřena

$$E_{\gamma}^{e} = E_{p} + K \left| \psi(0) \right|_{e}^{2}, \tag{59}$$

kde  $E_p$  je energie jaderného přechodu (bez interakce s okolním elektrickým polem),  $|\psi(0)|_e^2$ je elektronová hustota v zářiči, *K* je konstanta charakterizující daný izotop. Pro energii jaderného přechodu v absorberu dostaneme analogický výraz

$$E_{\gamma}^{a} = E_{p} + K \left| \psi(0) \right|_{a}^{2}, \tag{60}$$

kde  $|\psi(0)|^2_{a}$  je elektronová hustota v absorberu. Veličina

$$\Delta E_{\gamma} = E_{\gamma}^{a} - E_{\gamma}^{e} = K \left[ \left| \psi(0) \right|_{a}^{2} - \left| \psi(0) \right|_{e}^{2} \right]$$
(61)

se nazývá izomerním nebo chemickým posunem spektrální čáry absorberu vůči spektrální čáře zářiče.



Obr.16. Izomerní posun Mössbauerova spektra.

Výraz  $[|\psi(0)|_a^2 - |\psi(0)|_e^2]$  charakterizuje rozdíl elektronové struktury zářiče a absorberu. Při měření Mössbauerových spekter se rozdíl v chemickém složení zářiče a absorberu projeví nenulovou rezonanční rychlostí (obr. 16). Poloha středu spektra je určena izomerním posunem jader mössbauerovského izotopu v absorberu vůči jádrům téhož izotopu v zářiči. Izomerní (chemický) posun  $\delta$  je roven

 $\delta = \frac{c \cdot \Delta E_{\gamma}}{E_{p}}.$ (62)

#### Kvadrupólová interakce

Interakce kvadrupólového momentu jádra s gradientem elektrického pole v okolí jádra vyvolává rozštěpení některých jaderných energetických hladin. Výsledná energie kvadrupólové interakce je v případě osově symetrického elektrického pole v okolí jádra určena výrazem

$$W = \frac{1}{4}qe^2 Q \frac{3m^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)},$$
(63)

ve kterém veličina *eq* charakterizuje gradient vnějšího elektrického pole, Q je kvadrupólový moment jádra, m je magnetické kvantové číslo, I je spin jádra. Veličina  $e^2 q Q$  se nazývá konstanta hyperjemného kvadrupólového štěpení.

Příklad kvadrupólového štěpení pro jádra <sup>57</sup>Fe, která mají spin excitovaného stavu I = 3/2a spin základního stavu I = 1/2 je ukázán na obr. 17. Jsou-li energetické hladiny jader absorberu kvadrupólově rozštěpeny a zářič nemá rozštěpeny energetické hladiny (nebo naopak), pak Mössbauerovo spektrum má charakteristickou strukturu dubletu. Veličina kvadrupólového štěpení pro 57Fe je rovna

$$\Delta W = W_{e+3/2} - W_{e+1/2} = \frac{1}{2} q e^2 Q.$$
(64)



Obr. 17. Kvadrupólové štěpení energetických hladin jádra <sup>57</sup>Fe a Mössbauerovo spektrum

#### Magnetická dipólová interakce

Uvažujme jádro atomu v energetickém stavu  $E_i$  s nenulovým magnetickým momentem  $\vec{\mu}_i$  v časově konstantním vnitřním magnetickém poli o indukci  $\vec{B}$ . V důsledku hyperjemné interakce se energie jaderného stavu  $E_i$  změní o hodnotu

$$\Delta E_i = -\left(\vec{\mu}_i \vec{B}\right) = -\frac{\mu_i}{I} \, mB \,, \tag{65}$$

kde *I* je jaderný spin v energetickém stavu  $E_i$ , *m* je magnetické kvantové číslo, které nabývá 2I+1 hodnot. Počet dovolených spektrálních přechodů (čar ve spektru) je omezen výběrovými pravidly, která povolují pouze energetické přechody s  $\Delta m = 0, \pm 1$ .



Obr. 18. Magnetické dipólové štěpení energetických hladin jádra <sup>57</sup>Fe a jemu odpovídající Mössbauerovo spektrum.

Na obr. 18 je ukázán příklad hyperjemné struktury energetických hladin jádra <sup>57</sup>Fe v magnetickém poli a odpovídající tvar Mössbauerova spektra. V tomto případě se spektrum štěpí na šest spektrálních čar (jaderný Zeemanův jev).

#### Postup měření:

- Změřte amplitudové spektrum <sup>57</sup>Co a vyberte diskriminační hladiny jednokanálového analyzátoru tak, aby na výstupu analyzátoru byly impulzy odpovídající energii záření 14,4 keV. K identifikaci spektrální čáry použijte hliníkového filtru (pomocí hliníkové fólie tloušťky přibližně 0,1 mm je možné odfiltrovat doprovodné rentgenové záření s energií 6,3 keV). Proto je nutné změřit amplitudové spektrum dvakrát, jednou bez filtru a podruhé s filtrem, a porovnáním obou spekter určit diskriminační hladiny.
- V režimu konstantního zrychlení změřte Mössbauerovo spektrum vzorku železných pilin, spektrum použijte pro kalibraci energetické osy. Polohy spektrálních čar železa v mm/s jsou: -5,044 / -2,812 / -0,578 / 1,099 / 3,334 / 5,572
- 3. V režimu konstantního zrychlení změřte spektrum NH<sub>4</sub>MgFe(CN)<sub>6</sub> a LiFePO<sub>4</sub>. Určete kvadrupólové štěpení a izomerní posun spekter v rychlostních i energetických jednotkách.
- 4. V režimu konstantního zrychlení změřte spektrum Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Určete izomerní posun spektra v rychlostních i energetických jednotkách. Vypočtěte jaderné magnetické momenty  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  základního a prvního excitovaného stavu jádra <sup>57</sup>Fe. Pomocí vztahů (57) a (65) vyjádřete energie odpovídající všem dovoleným přechodům.

Například pro první spektrální čáru platí:

$$E_{rezI} = E_p - \Delta E_0 + \Delta E_I = E_p - \mu_0 B + \mu_I B$$
  

$$\wedge \quad E_{rezI} = E_p \left( I + \frac{v_{rezI}}{c} \right)$$
  

$$\rightarrow \quad v_{rezI} = \frac{c \left( \mu_I - \mu_0 \right) B}{E_p}$$

Pro výpočet magnetických momentů jádra sestavte vhodnou soustavu lineárních rovnic o dvou neznámých ( $\mu_0$ ,  $\mu_1$ ). Magnetická indukce vnitřního magnetického pole v Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> je 51 T.

Literatura: [5] - [8]

#### 11. Studium vlastností plynového proporcionálního detektoru

#### Cíl laboratorního cvičení:

Seznámit se s principy činnosti a s charakteristikami plynového proporcionálního detektoru ionizujícího záření.

**Pomůcky**: plynový proporcionální detektor, jednokanálový analyzátor, zdroje  $\alpha$ ,  $\beta$  záření (<sup>241</sup>Am, <sup>90</sup>Sr).

#### Teoretický rozbor:

#### Princip činnosti proporcionálního detektoru

Tento typ plynových detektorů využívá jevu zvaného plynové zesílení ke znásobení počtu nosičů nábojů vytvořených ionizací v plynu. Plynové zesílení je závislé na intenzitě elektrického pole a při atmosférickém tlaku se začíná uplatňovat u plynů nevytvářejících záporné ionty při intenzitách elektrického pole větších jak 10<sup>6</sup> V/m. Elektrony vytvořené primární ionizací jsou elektrickým polem urychlovány tak, že způsobují na své dráze ionizaci neutrálních atomů či molekul plnícího plynu. Elektrony vzniklé tímto procesem jsou polem rovněž urychlovány a dosáhnou-li energie větší než je ionizační energie neutrálních molekul plynu, samy ionizují atomy nebo molekuly plynové náplně. V důsledku toho lavinovitě roste počet iontů - elektronových párů, hovoříme o tzv. Townsendově lavině. V lavině vznikají jak elektrony, tak kladné ionty. Elektrony jsou vlivem velké intenzity elektrického pole v okolí anody velmi rychle sebrány, zatímco kladné ionty se pohybují ke vzdálené katodě podstatně menší rychlostí.

Plynové proporcionální detektory patří mezi spektrometrické detektory, neboť amplituda výstupního signálu je úměrná energii primární částice. Amplituda výstupního signálu je úměrná počtu elektronů sebraných na anodě, počet těchto elektronů je úměrný počtu elektronů vzniklých při primární ionizaci plynu a počet primárních elektronů je úměrný energii ionizační částice.

#### Charakteristiky plynových detektorů

Hlavními charakteristikami plynových proporcionálních detektorů jsou:

- počítací charakteristika,
- energetická rozlišovací schopnost,
- detekční účinnost.

Pro měření počítací charakteristiky (obr. 19) používáme monoenergetický zdroj záření a měříme závislost počtu impulzů z detektoru na napětí, které je na něm přiloženo. Každé vyhodnocovací zařízení má vždy jistou základní diskriminační úroveň  $U_D$ , kterou amplituda impulzu musí překročit, aby mohl být tento impulz zaregistrován. Při jisté hodnotě napájecího napětí detektoru  $U_1$  již některé impulsy převýší diskriminační úroveň  $U_D$  a budou registrovány. Se zvyšujícím se napětím na detektoru jejich počet roste a při napětí  $U_2$  bude dosaženo ustáleného počtu, který se při dalším zvyšování napětí do  $U_3$  bude jen málo měnit. Další zvyšování napětí nad  $U_3$  bude provázeno strmým nárůstem zaregistrovaného počtu impulzů - proporcionální detektor přechází přes oblast omezené proporcionality do Geigerovy oblasti, případně pak do oblasti samostatných výbojů. Oblast pracovních napětí ležících mezi  $(U_2, U_3)$  nazýváme **pracovní plošinou** (plateau). Z hlediska stability provozu a vhodného poměru signál/šum je nejvhodnějším pracovním bodem napětí odpovídající první třetině nalezené plošiny.



Obr. 19. Počítací charakteristika proporcionálního plynového detektoru.



Obr. 20. Počítací charakteristika proporcionálního detektoru pro  $\alpha$  i  $\beta$  částice.

V důsledku nízkých ionizačních účinků  $\beta$  záření ve srovnání s  $\alpha$  částicemi leží počítací plošina pro záření  $\beta$  při vyšších napětích než pro záření  $\alpha$ . Vedle toho je plošina pro  $\beta$  záření kratší a má větší sklon (obr. 20). Odlišné plošiny umožňují použít průtokového detektoru pro rozlišení aktivit  $\alpha$  a  $\beta$  ve směsných zářičích.

#### Energetická rozlišovací schopnost

Na fluktuaci výstupního signálu detektoru se především podílí statistický charakter zesílení v lavině. Fluktuace tvorby náboje při primární ionizaci je mnohem méně významná. Statistická fluktuace náboje při tvorbě signálu detektoru a šumy zesilovačů jsou příčinou toho, že pík monoenergetického záření v amplitudovém rozdělení výstupních impulzů z detektoru není zobrazen jako delta funkce, ale jako gaussián. Jeho šířka na polovině maxima slouží k vyjádření energetické rozlišovací schopnosti detektoru (schopnost odlišit od sebe dvě blízké energie). Rozlišovací schopnost - FWHM (Full Width on Half Maximum) se udává absolutně v jednotkách energie nebo relativně v procentech energie, odpovídající poloze maxima píku.

#### Detekční účinnost

Detekční účinností je nazývána pravděpodobnost registrace záření procházejícího citlivým objemem detektoru. Pro těžké nabité částice se hodnota tohoto parametru blíží 100%, pro elektrony (v závislosti na druhu plynové náplně, tlaku plynu, geometrii detektoru) může být účinnost mnohem menší. Detekční účinnost pro neutrony a γ záření je v intervalu 0,001 až 1% a závisí na účinném průřezu interakce, jejíž produktem je primární detekovaná částice.

#### Použití proporcionálních plynových detektorů

Při počítání  $\alpha$  a  $\beta$  částic a při absolutním měření aktivit  $\alpha$  a  $\beta$  se nejčastěji používají tzv. průtokové detektory (obr. 21). Při měření s  $\alpha$  zářením se tyto detektory používají v bezokénkovém režimu (zářič je umístěn uvnitř detektoru). Pro  $\beta$  záření se tyto detektory používají se vstupním okénkem z materiálu s co nejmenší plošnou hmotností (folie Mylar 1 mg/cm<sup>2</sup>, slída 2-5 mg/cm<sup>2</sup>), které dovoluje umístit zářič mimo objem detektoru.

Proporcionální plynové detektory byly do počátku osmdesátých let nejlepšími spektrometrickými detektory měkkého fotonového záření s energiemi v intervalu od 250 eV do 100 keV. V současnosti byly v oblasti laboratorní spektrometrie nahrazeny polovodičovými detektory, které mají lepší rozlišovací schopnost. Díky plynovému zesílení

jsou nenahraditelné v oblasti detekce fotonového záření energií menších než 1 keV (rentgenová difraktografie).



Obr. 21. Průtokový detektor s geometrií  $2\pi$ .

#### Postup měření:

1. Změřte a sestrojte počítací charakteristiku proporcionálního průtokového detektoru pro detekci  $\alpha$  i  $\beta$  záření a z této charakteristiky určete hodnoty prahového a pracovního napětí.

2. Zdůvodněte rozdílnost obou počítacích charakteristik.

Určete účinnost detekčního zařízení pro registraci  $\alpha$  i  $\beta$  záření daných energií. Použitý detektor registruje v prostorovém úhlu  $2\pi$  (obr. 21). Nezapomeňte uvažovat geometrický faktor, ostatní opravné faktory zanedbejte (rozbor účinnosti detektorů je uveden v kapitole 3 "Porovnání účinnosti scintilačního a Geigerova-Müllerova detektoru záření  $\gamma^{c}$ )

Literatura: [1]

#### 12. Dozimetrie ionizujícího záření a ochrana před jejich účinky

#### Cíl laboratorního cvičení:

Seznámit se s předloženými typy dozimetrických měřidel. Proměřit expoziční příkon vyvolaný <sup>60</sup>Co.

**Pomůcky**: osobní dozimetr, zdroje ionizujícího záření (<sup>60</sup>Co).

#### Teoretický rozbor:

Ionizujícím zářením se označuje záření vyvolávající ionizaci. Přímo ionizujícím zářením jsou nabité částice ( $\alpha$ ,  $\beta^-$ ,  $\beta^+$ , p). Nepřímo ionizující jsou částice bez elektrického náboje (X,  $\gamma$ , n), které při interakci s látkou uvolňují částice přímo ionizující nebo vyvolávají jadernou

přeměnu provázenou emisí přímo ionizujících částic. Mezi hlavní úkoly dozimetrie patří určování dávek ionizujícího záření, studium fyzikálních vlastností ionizujícího záření při interakci s prostředím, měření zdrojů a polí záření a stanovení jejich účinků na prostředí.

#### Veličiny charakterizující zdroje záření

Zdroj záření, který obsahuje daný radionuklid, podléhá radioaktivním přeměnám. Počet radioaktivních přeměn za jednotku času se nazývá aktivita a je definovaná vztahem (27). V něm  $\lambda$  označuje přeměnovou konstantu, pomocí které je možné spočítat poločas rozpadu  $T_{1/2}$  podle vztahu (26).

#### Veličiny charakterizující pole záření

Pole záření v okolí zdrojů ionizujícího záření se charakterizuje fluencí částic (hustotou prošlých částic)

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}a}, \qquad [\Phi] = \mathrm{m}^{-2}, \tag{66}$$

kde dN je počet částic, které vstoupily do koule s plošným obsahem da hlavního řezu. Příkon fluence částic (hustota toku částic) je definován

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad [\varphi] = \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1} \,. \tag{67}$$

Obdobně jsou definovány veličiny fluence energie

$$\Psi = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}a}, \qquad [\Psi] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{m}^{-2}, \qquad (68)$$

kde dE je zářivá energie dopadající na kouli s plochou hlavního řezu da (t.j. součet kinetických energií všech částic dopadajících na tuto kouli) a příkon fluence energie

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}, \qquad [\boldsymbol{\psi}] = \mathbf{J} \cdot \mathbf{m}^{-2} \cdot \mathbf{s}^{-1}. \tag{69}$$

#### Veličiny charakterizující působení záření na látku

Základní veličinou je dávka D (absorbovaná dávka), definovaná jako střední sdělená energie d $\overline{E}$  předaná ionizujícím zářením látce o hmotnosti dm

$$D = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}, \qquad [D] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = \mathrm{Gy} . \tag{70}$$

Jednotkou absorbované dávky je 1 Gy (gray), který je roven energii 1 J absorbované v 1 kg látky. Starší jednotkou byl 1 rad =  $10^{-2}$  Gy.

Sdělená energie je energie předaná látce

$$E = \sum E_{\rm in} - \sum E_{\rm out} + \sum Q, \qquad (71)$$

kde  $\sum E_{in}$  je součet energií všech ionizujících částic, které do daného objemu vstoupily,  $\sum E_{out}$  je součet energií všech částic, které objem opustily a  $\sum Q$  představuje součet všech změn energetických ekvivalentů klidových hmotností jader a elementárních částic při jakékoliv jaderné přeměně, k níž uvnitř daného objemu došlo (úbytky mají kladné znaménko, přírůstky záporné).

Dávkový příkon je přírůstek dávky dD za časový interval dt

$$D' = \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}, \qquad [D'] = \mathrm{Gy} \cdot \mathrm{s}^{-1}. \tag{72}$$

Kerma K je definována výrazem

$$K = \frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}m}, \qquad [K] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = \mathrm{Gy}, \tag{73}$$

kde  $dE_k$  je součet počátečních kinetických energií všech nabitých částic uvolněných působením nenabitých ionizujících částic v uvažovaném objemu látky o hmotnosti dm. Jednotka kermy je stejná jako jednotka dávky. Kerma se používá v souvislosti s nepřímo ionizujícím zářením. Obdobně jako dávkový příkon je definován i kermový příkon.

Expozice X je definována

$$X = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}m}, \qquad [D] = \mathrm{C} \cdot \mathrm{kg}^{-1}, \tag{74}$$

kde dQ je absolutní hodnota celkového elektrického náboje iontů jednoho znaménka vzniklých ve vzduchu při úplném zabrzdění všech elektronů a pozitronů uvolněných fotony v objemovém elementu vzduchu o hmotnosti dm. Starší jednotkou byl rentgen (1 R = 0,258 mC·kg<sup>-1</sup>).

Expoziční příkon X' je přírůstek expozice dX za časový interval dt

$$X' = \frac{dX}{dt}$$
,  $[X'] = C \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1} = A \cdot kg^{-1}$ . (75)

#### Veličiny ochrany před ionizujícím zářením

Biologický účinek ionizujícího záření závisí nejen na absorbované dávce, ale také na druhu záření. Proto byl zaveden pojem jakostní faktor Q, který vyjadřuje relativní biologickou účinnost daného záření. V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty jakostního faktoru pro různé druhy záření.

Tab. 1. Hodnoty jakostního faktoru Q pro různé druhy záření.

Záření					
fotony X a γ					
částice $\beta$ s $E_{max} > 30$ keV					
částice $\beta$ s $E_{\text{max}} < 30 \text{ keV}$					
tepelné (pomalé) neutrony					
rezonanční neutrony 0,5 eV - 1 keV					
neutrony se střední energií do 500 keV					
rychlé neutrony do 10 MeV					
protony a částice α					
odražená jádra a štěpné fragmenty					

Dávkový ekvivalent *H* se stanovuje ze vztahu

$$H = DQ , \qquad [H] = \mathrm{Sv}, \tag{76}$$

kde *D* je absorbovaná dávka a *Q* je jakostní faktor. Jednotkou dávkového ekvivalentu je sievert (*Sv*). I když jednotky dávka a dávkový ekvivalent mají stejný rozměr, je třeba je důsledně rozlišovat, protože mají jiný význam. Dřívější jednotkou dávkového ekvivalentu byl 1rem (1rem = 0,01 Sv). Příkon dávkového ekvivalentu H' je definován jako přírůstek dávkového ekvivalentu dH za časový interval dt

$$H' = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}, \qquad [H'] = \mathrm{Sv} \cdot \mathrm{s}^{-1}. \tag{77}$$

#### Biologický účinek záření

Interakce ionizujícího záření s živou hmotou je velmi složitý proces, který se zpravidla dělí na tyto fáze: fyzikální, fyzikálně chemickou, chemickou a biologickou. Ve fyzikální fázi je energie záření přenesena na živou hmotu. Výsledkem je excitace a ionizace molekul. Doba života excitovaných stavů molekul (řádově 10<sup>-10</sup> s) zároveň představuje dobu trvání fyzikální fáze interakce. Během druhé fyzikálně chemické fáze dochází k tvorbě sekundárních reaktivních atomů a molekul v důsledku intermolekulárního případně i intramolekulárního přenosu energie a deexcitačních přechodů. Doba trvání této fáze je řádově 10<sup>-8</sup> s. Chemická fáze nastává po dosažení stavu tepelné rovnováhy systému. Dříve vytvořené radikály reagují

navzájem nebo s okolím za vzniku molekul, které můžeme nazvat radiačně změněnými molekulami. Tato fáze trvá řádově 10<sup>-6</sup> s.

Vzniklé molekulární změny se projevují v biologickém systému, proces se dostává do čtvrté - biologické fáze. Hrubé narušení molekuly DNA může znemožnit buněčné dělení, tj. způsobit reprodukční smrt buněk, která se uplatňuje jako rozhodující mechanizmus častých poškození z ozáření. Jiným typem poruchy DNA je změna genetické informace buňky dochází k mutacím. Reparační (obnovné) procesy odstraňují část důsledků ozáření. Důležitým pojmem je radiosenzitivita jednotlivých tkání člověka, tj. vnímavost k vyvolání akutních klinicky významných důsledků. Nejvyšší radiosenzitivitu vykazují lymfatická tkáň, aktivní kostní dřeň, střevní epitel i jiné výstelkové tkáně, kožní orgán.

Z hlediska radiační ochrany se rozdělují účinky do dvou kategorií podle odlišného vztahu mezi dávkou a účinkem. K deterministickým účinkům náleží akutní nemoc z ozáření, akutní lokalizovaná poškození, poškození plodu, nenádorová pozdní poškození. Deterministický účinek se projeví až v případě, kdy absorbovaná dávka je vyšší než určitá prahová hodnota. S dalším zvyšováním dávky stoupá počet postižených a pro jistou hodnotu absorbované dávky je poškozeno 100 % postižených.

Mezi stochastické účinky patří zhoubné nádory a genetické změny. Obecně se vychází z bezprahové lineární závislosti, podle níž každé zvýšení dávky je spojeno s úměrným zvýšením pravděpodobnosti pozdních změn v ozářené tkáni či orgánu. Stochastický charakter těchto účinků spočívá v tom, že lze předpovědět vzestup výskytu těchto účinků v ozářené populaci, ale není možné rozpoznat v žádném jednotlivém případě, zda se jedná o důsledek ozáření. Nádory a genetická poškození se u jednotlivých osob neliší od obdobných poruch zdraví vznikajících spontánně v neozářené populaci.

Není reálné udržet dávky záření na nulové úrovni a tudíž není možné zcela zamezit stochastickým účinkům ozáření. Ochrana před ozářením ve vztahu k stochastickým účinkům si může klást za cíl pouze zavedení a dodržování takových opatření, která povedou k omezení pravděpodobnosti jejich výskytu na přijatelnou úroveň. Základem této ochrany jsou doporučené hodnoty dávkových limitů, které jsou zvlášť definovány pro pracovníky s ionizačním zářením a zvlášť pro obyvatelstvo. Dávkový ekvivalent pro pracovníky činí 20 mSv za rok, pro obyvatelstvo 1 mSv za rok.

#### Ochrana před zářením

Ochrana pracovníka před ozářením se provádí:

 a) volbou dostatečné vzdálenosti mezi zdrojem záření a pracovníkem (dávka záření klesá s druhou mocninou vzdálenosti). b) stíněním, tj. vkládáním absorberů mezi zdroj záření a pracovníka.

c) časem (radiační zátěž je tím menší, čím kratší dobu je pracovník vystaven působení ionizujícího záření).

#### Postup měření:

1. Prověřte platnost zákona, že dávka klesá s druhou mocninou vzdálenosti.

Literatura: [1], [9] - [13]

# Určení relativního obsahu izotopu <sup>40</sup>K v přirozené směsi draslíku

#### Cíl laboratorního cvičení:

Určete relativní obsah izotopu <sup>40</sup>K v přirozené směsi draslíku obsaženého v KCl.

**Pomůcky:** měřič nízkých aktivit s plynovým průtokovým detektorem, 4 tablety KCl různých hmotností, standardní zářiče  $\alpha$  a  $\beta$  (<sup>241</sup>Am, <sup>90</sup>Sr).

#### Teoretický rozbor:

Přirozená směs draslíku obsahuje tři různé izotopy, z nichž dva (<sup>39</sup>K, <sup>41</sup>K) jsou stabilní. Třetí izotop <sup>40</sup>K má poločas rozpadu 1,28.10<sup>9</sup> roku. Jeho rozpadové schéma je uvedeno v příloze 1. Je-li v uvažovaném vzorku  $N_{\rm R}$  počet jader radioaktivního izotopu, která se v čase *t* ještě nerozpadla, je počet d $N_{\rm R}$  jader, jež se rozpadnou v časovém intervalu (*t*, *t*+d*t*), dán vztahem

$$-dN_{\rm R} = \lambda N_{\rm R} dt, \tag{78}$$

kde  $\lambda$  je rozpadová konstanta, pro níž platí  $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$  ( $T_{1/2}$  je poločas rozpadu). Počet částic

zaregistrovaných za dobu dt detektorem s účinností y bude

$$\mathrm{d}n = g \gamma r \mathrm{d}N_{\mathrm{R}} = g \gamma r \lambda N_{\mathrm{R}} \mathrm{d}t,$$

kde r je počet registrovatelných produktů rozpadu, jestliže v preparátu dojde právě k jednomu radioaktivnímu rozpadu, a g je geometrický faktor, který při daném experimentálním uspořádání vyjadřuje poměr počtu částic dopadlých na účinnou plochu detektoru k celkovému počtu částic emitovaných vzorkem.

Počet atomů N prvku X ve sloučenině můžeme vypočítat ze vztahu

$$N = \frac{A_{rx}}{M_m} \frac{m}{m_u},\tag{79}$$

kde  $m_u$  je atomová hmotnostní konstanta, m je hmotnost vzorku,  $A_{rx}$  je relativní atomová hmotnost prvku X a  $M_m$  je molární hmotnost. Poměrné zastoupení radioaktivního izotopu ve směsi je dáno poměrem

$$p = \frac{N_{\rm R}}{N} \cdot 100 \,\% \,. \tag{80}$$

#### Postup měření:

- 1. Změřte charakteristiku proporcionálního plynového detektoru pro záření  $\alpha$  i  $\beta$ .
- 2. Nastavte pracovní režim "Alfa Beta automatu" pro měření záření  $\beta$  o nízké aktivitě (měření v režimu koincidence).
- 3. Změřte pozadí při vložené prázdné čisté misce za dobu 1000 s.
- 4. Vypočtěte počet atomů draslíku v připravených tabletách KCl známé hmotnosti.
- 5. Změřte aktivity vzorků, proveď te korekci na pozadí, geometrický faktor, samoabsorpci v materiálu zářiče.
- 6. Určete počet jader <sup>40</sup>K ve vzorcích.
- 7. Určete poměrné zastoupení izotopu <sup>40</sup>K v přirozené směsi draslíku.

K výpočtům užijte hodnot  $m_{\rm u} = 1,66.10^{-27}$  kg,  $A_{\rm r}({\rm K}) = 39,0983$ ,  $A_{\rm r}({\rm Cl}) = 35,4527$ ,

 $T_{1/2}(^{40}\text{K}) = 1,28 . 10^9 \text{ roků}.$ 

# Příloha 1

Rozpadová schémata některých vybraných radioaktivních izotopů





EZ ... elektronový záchyt

## Příloha 2

#### Stanovení parametrů exponenciální závislosti metodou lineární regrese

Mějme soubor experimentálních dat reprezentovaný N body  $[x_i, y_i]$ , i = 1, ..., N. Cílem bude najít přímku Y = aX + b, která daný soubor dat vyrovná metodou nejmenších čtverců, tj. aby součet druhých mocnin odchylek souřadnic  $Y_i$  bodů  $[x_i, Y_i]$  této přímky od experimentálních hodnot  $y_i$  byl minimální (obr. 22). Jedná se tedy o nalezení minima funkce

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i - b)^2 .$$
(81)



Obr. 22. Vyrovnání experimentálních bodů přímkou metodou nejmenších čtverců.

Matematické řešení vede k soustavě rovnic pro hledané parametry přímky a, b

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \tag{82}$$

s výsledky [14]

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{n \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2},$$
(83)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{n \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}.$$
(84)

Uvedené vztahy je možné také aplikovat při prokládání experimentálních bodů exponenciální závislostí typu  $y = B \exp(-Ax)$ , která se objevuje v několika úlohách praktika. Logaritmováním získáme lineární podobu této rovnosti ve tvaru

$$\ln y = \ln B - Ax \,. \tag{85}$$

Dosadíme-li do vztahů (83) a (84) místo  $y_i$  logaritmovaná data ln  $y_i$ , dostaneme hodnoty  $a = -A, b = \ln B$ .

#### Příloha 3

## Tabulka hodnot $\chi^2$

Pro posouzení shody teorie a experimentálních výsledků byla rozpracována statistická kritéria testování hypotéz. Jednou z nejčastěji používaných metod je kritérium  $\chi^2$ , které určuje míru (pravděpodobnost) shody teorie s experimentem. Při aplikaci této metody je potřebné z experimentálního a teoretického rozdělení pravděpodobností určit veličinu  $\chi^2$ :

$$\chi^{2} = N \sum_{k=1}^{\max} \frac{\left( p_{\exp}(k) - p_{teor}(k) \right)^{2}}{p_{teor}(k)} , \qquad (86)$$

kde *N* je počet měření,  $p_{\text{teor}}(k)$  a  $p_{\exp}(k)$  je teoretická a experimentální pravděpodobnost registrace *k* částic, *max* je maximální počet zaregistrovaných částic. Hodnotu veličiny  $\chi^2$ srovnáváme s tzv. kritickými hodnotami  $\chi^2_{\text{kr}}$ , které jsou pro různý počet stupňů volnosti r = n- *l* (kde *n* je počet naměřených hodnot náhodné veličiny) a pro různé pravděpodobnosti shody *W* uvedeny v Tab. 2. Ze vztahu (86) vidíme, že se zmenšováním rozdílů mezi teoretickou a experimentální pravděpodobností klesá hodnota veličiny  $\chi^2$  a roste pravděpodobnost shody experimentu s teoretickým modelem.

	W pravděpodobnost shody												
	teoretického a experimentálního rozdělení												
r	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,01	0,001
4	0,3	0,4	0,7	1,1	1,6	2,2	3,4	4,9	6,0	7,8	9,5	13,3	18,5
5	0,6	0,8	1,1	1,6	2,3	3,0	4,4	6,1	7,3	9,2	11,1	15,1	20,5
6	0,9	1,1	1,6	2,2	3,1	3,8	5,3	7,2	8,6	10,6	12,6	16,8	22,5
7	1,2	1,6	2,2	2,8	3,8	4,7	6,3	8,4	9,8	12,0	14,1	18,5	24,3
8	1,6	2,0	2,7	3,5	4,6	5,5	7,3	9,5	11,0	13,4	15,5	20,1	26,1
9	2,1	2,5	3,3	4,2	5,4	6,4	8,3	10,7	12,2	14,7	16,9	21,7	27,9
10	2,6	3,1	3,9	4,9	6,2	7,3	9,3	11,8	13,4	16,0	18,3	23,2	29,6
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9	14,6	17,3	19,7	24,7	31,3
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0	15,8	18,5	21,0	26,2	32,9
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1	17,0	19,8	22,4	27,7	34,5
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2	18,1	21,1	23,7	29,1	36,1
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3	19,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,1	12,6	15,3	18,4	20,5	23,5	26,3	32,0	39,2
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,0	13,5	16,3	19,5	21,6	24,8	27,6	33,4	40,8
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6	22,8	26,0	28,9	34,8	42,3
19	7,6	8,6	10,1	11,6	13,7	15,4	18,3	21,7	23,9	27,2	30,1	36,2	43,8
20	8,3	9,2	10,8	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8	25,0	28,4	31,4	37,6	45,3
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9	26,2	29,6	32,7	38,9	46,8
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9	27,3	30,8	33,9	40,3	48,3
23	10,2	11,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0	28,4	32,0	35,2	41,6	49,7
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1	29,6	33,2	36,4	43,0	51,2
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,2	30,7	34,4	37,7	44,3	52,6
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,2	31,8	35,6	38,9	45,6	54,0
27	12,9	14,1	16,1	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3	32,9	36,7	40,1	47,0	55,5
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4	34,0	37,9	41,3	48,3	56,9
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5	35,1	39,1	42,6	49,6	58,3
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5	36,2	40,3	43,8	50,9	59,7

Tab. 2. Tabulka kritických hodnot  $\chi^2_{kr}$ 

#### Literatura:

- [1] J. Gerndt: Detektory ionizujícího záření. Vydavatelství ČVUT, Praha 1994, str.60-75.
- [2] L. Dvořák: Praktikum z atomové a jaderné fyziky. Olomouc 1988, str.110-116.
- [3] A. Gosman, Č. Jech: Jaderné metody v chemickém výzkumu. ACADEMIA, Praha 1989, str.56-60.
- [4] University Laboratory Experiments. PHYSICS, PHYWE 1994, 5.2.20.
- [5] J. Dlouhá: Mössbauerův jev a jeho využití, SNTL, Praha 1968.
- [6] W.S. Spinel: Rezonans gamma lučej v kristallach. Moskva, Nauka, 1969.
- [7] S.M. Irkajev, R.N. Kuzmin, A.A. Opalenko: Jadernyj gamma rezonans. Moskva, Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1970.
- [8] M. Mašláň: Mössbauerova spektroskopie. Olomouc, Palackého univerzita, 1992.
- [9] V. Hušák: Biofyzikální základy aplikací ionizujícího záření. UP, Olomouc 1987, str. 9-29.

- [10] V. Hušák: Zdravotní rizika ionizujícího záření a ochrana před ním. UP, Olomouc 1987, str. 7-12.
- [11] L. Musílek, et al: Dozimetrie ionizujícího záření (Integrující metody), Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.
- [12] J. Sabol: Příručka dozimetrie a ochrany před zářením. Vydavatelství ČVUT, Praha 1996.
- [13] V. Klener et al: Hygiena záření, Avicenum, Praha, 1987.
- [14] J. Škrášek, Z. Tichý: Základy aplikované matematiky III. SNTL, Praha 1990.