Fyzikální praktikum I. (KEF/FP1) – sylaby úloh

Úvodní praktikum: zásady bezpečnosti práce, první pomoc, úvod k jednotlivým úlohám

I. cyklus

Úloha č. 1: ***Měření hustoty pevných látek a) přímou metodou, b) hydrostatickou metodou, c) pyknometrem***

Hustota homogenního tělesa je dána jako poměr hmotnosti tělesa a jeho objemu $\rho = \frac{m}{V}$. Jednotkou hustoty v soustavě SI je $kg.m^{-3}$. Hmotnost tělesa lze určit pomocí vážení s velkou přesností, pro určení objemu existuje řada metod.

1. Má-li těleso jednoduchý geometrický tvar, tj. objem lze vyjádřit jako funkci určitých délek, je určení objemu převedeno na měření délek, které lze provádět běžnými mechanickými pomůckami – mikrometrem, posuvným měřítkem apod.
2. Lze-li objem zaujímaný tělesem naplnit kapalinou o známé hustotě (např. vodou), lze objem stanovit pomocí vážení.
3. Objem lze určit na základě Archimedova zákona. Objem tělesa je stanoven pomocí vážení ve dvou různých prostředích (např. ve vzduchu a ve vodě).

Hustota pevných těles je jen málo závislá na teplotě a tlaku, proto není třeba provádět korekce.

<u>a) Měření hustoty pevných látek přímou metodou</u>

Určování hustoty tělesa přímou metodou lze využít u těles pravidelného tvaru, kdy lze určit objem na základě definičního vztahu . Budeme určovat hustotu tělesa ve tvaru válečku. Objem válce je dán jako $V = \pi r^2 h$, kde r je poloměr válečku a h jeho výška. Výšku h měříme posuvným měřítkem, mikrometrem změříme průměr d válečku, z něhož vypočteme poloměr r. Hmotnost m válečku určíme vážením na laboratorních (popř. digitálních) vahách. Při určování hmotnosti provedeme redukci na vakuum. Podle vzorce vypočteme hustotu měřeného tělesa a nejistotu měření.

<u>Postup měření:</u>

a) měření výšky h válečku – zkontrolujeme nulovou polohu posuvného měřítka. V případě použití digitálního měřítka nastavíme nulu před měřením. Výšku měříme desetkrát vždy v jiné osové rovině. Výsledky měření zapíšeme do tabulky, kde budou uvedeny také odchylky a druhé mocniny odchylek od aritmetického průměru z naměřených hodnot h. Střední nejistotu určíme z druhých mocnin odchylek. Výsledek uvedeme ve tvaru h = (…± …) m.

b) určení poloměru r – měření provedeme pomocí mikrometru. Nejprve určíme desetkrát nulovou polohu mikrometru d_o . Odhadujeme desetiny nejmenších dílků stupnice. Nyní změříme desetkrát průměr válečku d_1 (opět v různých průměrech válečku). Měření zapíšeme do tabulky, kde budou uvedeny nulová poloha mikrometru, odchylky a druhé mocniny odchylek, průměry d_1 válečku , odchylky a druhé mocniny odchylek vztažené k průměrné hodnotě d_o resp. d_1. Výsledky zapíšeme ve tvaru d_o = (…±…) cm, d_1 = (…±…) cm. Skutečný průměr válečku je $d = d_1 – d_o$. Střední nejistotu v určení d zjistíme

pomocí vztahu $\overline{\sigma}\, d = \sqrt{(\overline{\sigma} d_1)^2 + (\overline{\sigma} d_0)^2}$ .Poloměr $r = d/2$, střední nejistota $\overline{\sigma} r = \dfrac{\overline{\sigma} d}{2}$.
Všechny naměřené hodnoty převedeme na metry a dosadíme do vztahu pro výpočet objemu. Střední nejistotu objemu určíme pomocí vztahu

$\overline{\sigma} V = V\sqrt{\left(\dfrac{2\sigma r}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma h}{h}\right)^2}$. Nejistotu v určení objemu zaokrouhlíme na jedno platné místo, analogicky zaokrouhlíme vypočítaný objem a výsledek zapíšeme ve tvaru $V = (\ldots \pm \ldots)\ \mathrm{m}^3$.

c) určení hmotnosti m – váleček zvážíme na laboratorních vahách, hmotnost převedeme na kilogramy. Nejistotu v určení hmotnosti zanedbáme vzhledem k chybě v určení objemu.

d) Vypočteme hustotu tělesa – naměřené hodnoty dosadíme do vztahu $\rho = \dfrac{m}{V}$, nejistotu v určení hustoty vypočteme podle vztahu $\overline{\sigma}\rho = \rho \dfrac{\overline{\sigma} V}{V}$. Výsledek zapíšeme ve tvaru $\rho = (\ldots \pm \ldots)\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. Takto určenou hodnotu hustoty porovnáme pro daný materiál s tabelovanou hodnotou , popřípadě podle tabulek odhadneme, z jakého materiálu bylo těleso zhotoveno.

b) Měření hustoty pevných látek hydrostatickou metodou.

Je-li těleso, jehož hustotu určujeme, nepravidelného tvaru, postupujeme metodou dvojího vážení (hydrostatická metoda). Jedná se o srovnávací metodu – těleso zvážíme nejprve na vzduchu a potom je vážíme ponořené do kapaliny o známé hustotě. Hustotu vypočteme pomocí hmotností vyvažujících závaží a hustoty kapaliny. Protože vyvažující závaží klademe vždy na stejnou misku vah, je vážení správné i v případě nerovnoramennosti vah.
Při prvním vážení vyvážíme těleso, jehož hustotu měříme, na vzduchu závažím Z. Označíme-li V objem tělesa, je hustota dána jako $\rho = \dfrac{Z}{V}$. Druhé vážení slouží k určení objemu V – těleso ponoříme do kapaliny o známé hustotě (destilovaná voda) a vyvážíme závažím Z_1. Protože platí Archimedův zákon, bude závaží Z_1 v důsledku vztlakové síly menší právě o hmotnost vody stejného objemu V jaký má těleso. Je-li ρ_1 hustota destilované vody, bude její hmotnost dána $m_1 = Z - Z_1 = \rho_1 V$. Odtud hledaný objem $V = \dfrac{Z - Z_1}{\rho_1}$. Nyní stačí dosadit takto určený objem V do vztahu pro výpočet hustoty tělesa ρ a máme

$$\rho = \frac{Z}{Z - Z_1}\rho_1 \ .$$

Při tomto měření je třeba provádět opravu na vztlak vzduchu. Označíme-li ρ_v hustotu vzduchu, ρ_z hustotu závaží a ρ hustotu závaží, pak platí pro těleso vyvážené na vzduchu rovnice $m\left(1 - \dfrac{\rho_v}{\rho}\right) = Z\left(1 - \dfrac{\rho_v}{\rho_z}\right)$, pro těleso vyvážené v kapalině $m\left(1 - \dfrac{\rho_v}{\rho_1}\right) = Z_1\left(1 - \dfrac{\rho_v}{\rho_z}\right)$.
Obě rovnice vydělíme a pro hledanou hustotu dostaneme

$$\rho = \frac{Z}{Z - Z_1}(\rho_1 - \rho_v) + \rho_v \, .$$

Postup měření:

1. Nad misku vah upevníme drátek, na který budeme zavěšovat zkoumaný předmět, vyvážíme jej (tárou) a určíme nulovou polohu vah.
2. Zavěsíme zkoumané těleso a vyvážíme jej závažím Z.
3. Těleso ponoříme do destilované vody tak, aby se nedotýkalo stěn ani dna nádoby, nebyly na něm bublinky vzduchu a vyvážíme jej závažím Z_1. Vážení realizujeme tak, že přes misku vah dáme můstek, na něj postavíme kádinku s destilovanou vodou.
4. Určíme teplotu kapaliny a její hustotu najdeme v tabulkách.
5. Vypočteme hustotu tělesa – nejprve přibližně bez redukce na vakuum, potom výsledek upřesníme pomocí redukce na vakuum. Hustota závaží je 8500 kg.m^{-3}. Hustotu vzduchu vypočítáme nebo najdeme pro danou teplotu v laboratoři v tabulkách.

c) Měření hustoty pevných látek pyknometrem

Metoda je určena pro stanovení hustoty drobných tělísek nepravidelného tvaru. Je to metoda srovnávací, založená na trojím vážení.

A) Vyvážíme měřená tělíska závažím Z, jejich objem je V a hustota $\rho = \frac{Z}{V}$.

B) Určení objemu V – pyknometr naplníme destilovanou vodou a vyvážíme závažím Z_1. Do pyknometru nasypeme tělíska. Z pyknometru vyteče voda o objemu rovném objemu tělísek. Nyní pyknometr vyvážíme závažím Z_2. Hmotnost vody, která vytekla z pyknometru, je $m = Z + Z_1 - Z_2$.

C) Určíme objem tělísek ze vztahu $V = \frac{m}{\rho_1} = \frac{Z + Z_1 - Z_2}{\rho_1}$, kde ρ_1 je hustota vody.

D) Hustotu zkoumaných tělísek zjistíme po dosazení podle vztahu $\rho = \frac{Z}{Z + Z_1 - Z_2}\rho_1$. Pro přesnější měření je třeba provést opět redukci na vakuum, hustota tělísek je potom určena pomocí vztahu $\rho = \frac{Z}{Z + Z_1 - Z_2}\left(\rho_1 - \rho_v\right) + \rho_v$, kde ρ_v je hustota vzduchu.

Postup měření:

Pyknometr nejprve propláchneme, poté naplníme destilovanou vodou asi do poloviny hrdla a opatrně zasuneme zátku. Kapilárou v zátce vyteče přebytečná kapalina, kterou otřeme filtračním papírem. Pyknometr vždy držíme za hrdlo, abychom jej nezahřívali. Uvnitř pyknometru nesmí být vzduchové bubliny, kapilára musí být naplněna vodou. Pyknometr s vodou vyvážíme závažím Z_1. Zvolený počet tělísek vyvážíme závažím Z. Pak vyjmeme zátku pyknometru, odvážená tělíska do něj opatrně nasypeme . Pyknometr uzavřeme zátkou a osušíme filtračním papírem. Pyknometr s tělísky vyvážíme závažím Z_2. Změříme teplotu vody v pyknometru a v tabulkách najdeme její hustotu. Hustotu tělísek vypočítáme bez redukce na vakuum. Měření opakujeme pětkrát, vždy pro jiný počet tělísek. Naměřené hodnoty a vypočtené hustoty zapíšeme do přehledné tabulky:

N	Z Kg	Z_1 kg	Z_2 kg	ρ kg.m^{-3}	Δ kg.m^{-3}	Δ^2 (kg.m^{-3})^2
1						
2						
3						
4						
5						
				$\bar{\rho}=$	$\Sigma\Delta=$	$\Sigma\Delta^2=$

Vypočteme střední hodnotu hustoty a nejistotu měření. Výsledek redukujeme na vakuum. Určenou hodnotu hustoty zapíšeme ve tvaru $\rho = (\ldots\pm\ldots)$ kg.m^{-3} a porovnáme s hodnotou, kterou pro daný materiál udávají tabulky, popř. výsledek porovnáme s hustotou určenou jinými metodami.

Měření hustoty kapalin
a) pomocí ponorného tělíska

Při měření využíváme působení vztlakových sil na těleso v kapalině o neznámé hustotě a ve srovnávací kapalině, jejíž hustotu známe (destilovaná voda). Tělísko vyvážíme nejprve na vzduchu závažím Z_0 a potom je v kapalině o neznámé hustotě ρ vyvážíme závažím Z. Závaží Z je menší o hmotnost kapaliny takového objemu V, jaký má tělísko. Hmotnost kapaliny je $m = Z_o - Z$. Ponoříme-li tělísko do destilované vody o hustotě ρ_1, vyvážíme je závažím Z_1, které je menší než Z_o o hmotnost vody o objemu V, hmotnost vody je $m_1 = Z_0 - Z_1$. Zkoumaná kapalina i voda mají stejný objem rovný objemu tělíska V, jejich hmotnosti můžeme vyjádřit pomocí hustot

$m = \rho V = Z_o - Z, \qquad m_1 = \rho_1 V = Z_o - Z_1.$

Po vydělení obou rovnic máme pro hledanou hustotu vztah $\rho = \dfrac{Z_o - Z}{Z_o - Z_1}\rho_1$, v případě redukce na vakuum $\rho = \dfrac{Z_o - Z}{Z_o - Z_1}(\rho_1 - \rho_v) + \rho_v$.

Postup měření:

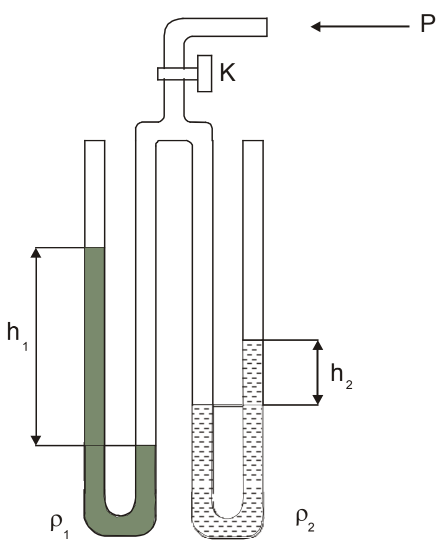
1. Vyvážíme drátek, na který budeme tělíska zavěšovat.
2. Na drátek zavěsíme tělísko a vyvážíme je závažím Z_0.
1. Tělísko ponoříme do kapaliny, jejíž hustotu určujeme a vyvážíme je závažím Z. Změříme teplotu kapaliny.
2. Tělísko opláchneme vodou, ponoříme je do destilované vody a vyvážíme závažím Z_1. Změříme teplotu destilované vody. Obě teploty se nesmí lišit, aby nebylo třeba měření

opravovat vzhledem k teplotní roztažnosti tělíska. Za materiál pro ponorné tělísko volíme sklo, neboť teplotní roztažnost skla je malá.
3. Hustotu destilované vody pro danou teplotu vyhledáme v tabulkách a vypočteme neznámou hustotu.

b) metodou spojitých nádob

Jedná se opět o metodu srovnávací. Na základě rovnosti hydrostatických tlaků srovnáváme hustotu ρ_2 neznámé kapaliny s hustotou ρ_1 kapaliny známé (destilovaná voda). Jestliže se měřené kapaliny spolu nemísí, stačí použít jednoduché trubice ve tvaru U, do níž nalijeme nejprve jednu kapalinu a potom druhou. Když se hladiny ustálí, jsou hydrostatické tlaky v rovině společného rozhraní stejné. Jsou-li h_1 a h_2 výšky kapalinových sloupců měřených od rozhraní, lze psát $h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$, odkud vyjádříme hledanou hustotu $\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1$.

V případě, že se jedná o kapaliny, které se spolu mísí, použijeme zařízení podle obr.1 . Do jedné z obou U-trubic nalijeme kapalinu o neznámé hustotě ρ_2, æo druhé trubice známou kapalinu (destilovaná voda) o hustotě ρ_1. Je-li kohout ve společné části otevřen, jsou hladiny v obou trubicích ve stejné výši. Vyvoláme-li nyní ve společné části přetlak, hladiny ve vnitřních ramenech klesnou a ve vnějších vystoupí. Změříme-li nyní rozdíl hladin v obou trubicích, lze přetlak p vyjádřit pomocí hydrostatických tlaků kapalinových sloupců $p = h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$. Odtud vyjádříme hustotu neznámé kapaliny $\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1$.

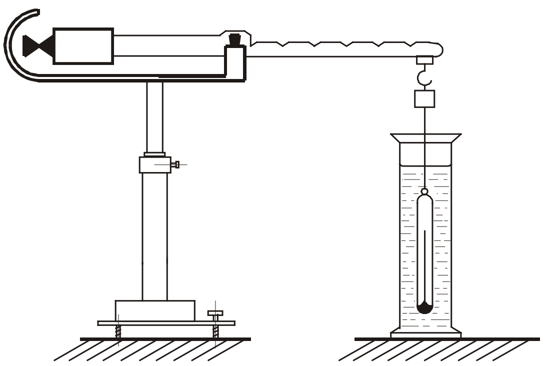


Postup měření:

1. U zařízení podle obrázku otevřeme kohout K a do jedné U-trubice nalijeme zkoumanou látku asi do poloviční výšky ramen., do druhé U-trubice nalijeme stejný objem destilované vody.
2. Pomocí gumového balónku vyvoláme přetlak p – hladiny se rozestoupí (asi na 10 cm). Uzavřeme kohout K a počkáme, až se rozdíl hladin ustálí.
3. Odečteme výšky hladin v obou ramenech trubice. Jsou-li polohy hladin destilované vody l_1 a l_2 , je rozdíl hladin $h_1 = l_2 - l_1$. Podobně u neznámé kapaliny $h_2 = l_2' - l_1'$.
4. Měření opakujeme několikrát (10krát) , výsledky zapíšeme do tabulky.
5. Vypočteme aritmetický průměr poměru výšek $\overline{a}$ střední chybu měření $\overline{\sigma}a$. V tabulkách vyhledáme hustotu destilované vody ρ_1 pro danou teplotu.
6. Vypočteme hustotu neznámé kapaliny podle vztahu $\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1 = a\rho_1$.
7. Stanovíme nejistotu v určení hustoty $\overline{\sigma}\rho_2 = \frac{\overline{\sigma}a}{a}\rho_2$. Nejistota v určení hustoty vody je zanedbatelně malá.

Měření hustoty kapalin Mohrovými vážkami.

Měření hustoty kapalin Mohrovými-Westphalovými vážkami je založeno na metodě ponorného tělíska. Mohrovy vážky jsou nerovnoramenné pákové váhy.



Obr. 2 : *Mohrovy vážky.*

Na konci delšího ramene je zavěšeno skleněné tělísko (obvykle je to teploměr, který umožní okamžité určení teploty zkoumané kapaliny), rameno od tělíska k ose je rozděleno na 10 dílků. Je-li tělísko zavěšeno, jsou váhy v rovnováze. Ponoříme-li tělísko do kapaliny, rovnováha se poruší, neboť na tělísko působí vztlaková síla, jejíž velikost je přímo úměrná hustotě kapaliny. Rovnováhu obnovíme pomocí jezdců, které klademe na rozdělené rameno. Hmotnost jezdců je volena tak, že ponoříme-li tělísko do destilované vody o teplotě 4 ^{0}C, vyrovná se vztlaková síla největším jezdcem, zavěšeným přímo nad tělísko (10. dílek). Hmotnost jezdce je tedy rovna hmotnosti destilované vody (o teplotě 4 ^{0}C) stejného objemu, jako je objem tělíska. Hustota vody při této teplotě je ρ_1 = 1000 kg.m^{-3} . Vyrovnáme-li při ponoření tělíska do jiné kapaliny vztlakovou sílu zavěšením jezdce na n-tý dílek ramene, je hustota této kapaliny ρ = n.100 kg.m^{-3}. K pohodlnému a přesnějšímu vyvažování slouží další dva jezdci, jejichž hmotnost je 10krát a 100krát menší než hmotnost základního jezdce. Hustotu kapaliny můžeme určit s přesností 1 kg.m^{-3}.

Postup měření:

Váhy vyjmeme ze skříňky a jejich podstavec zasuneme do bajonetového držáku na horní desce skříňky. Nasadíme vahadlo a na jeho delší rameno zavěsíme skleněné tělísko. Stavěcím šroubem nastavíme nulovou polohu . Tělísko ponoříme do měřené kapaliny tak, aby bylo zcela ponořeno a nedotýkalo se stěn nádoby. Pomocí jezdců obnovíme rovnováhu a zapíšeme hustotu ρ´ kapaliny. Změříme teplotu kapaliny.
Při přesnějším měření je třeba provést kontrolu Mohrových vážek. Tuto kontrolu provedeme změřením hustoty destilované vody. Je-li při ponoření tělíska do destilované vody změřena její hustota $\rho_1{}'$, pak vážky jsou správné, shoduje-li se tato hustota s hodnotou udávanou pro danou teplotu tabulkami. Jestliže se hustota $\rho_1{}'$ liší od správné hustoty ρ_1 , vypočteme správnou hustotu ρ měřené kapaliny ze vztahu $\rho = \frac{\rho_1}{\rho'}\rho'$. Při měření se nesmí teplota zkoumané kapaliny lišit od teploty vody více než o 4 ^{0}C, jinak by se projevila změna objemu tělíska.

Úloha č. 2: ***Měření momentu setrvačnosti***

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose je definován vztahem $J = \Sigma\, m_i r_i^2$, kde m_i jsou hmotnosti jednotlivých elementů a r_i vzdálenosti těchto elementů od osy. Jednotkou momentu setrvačnosti je kg.m^2. Pro tělesa se spojitě rozloženou hmotou je moment setrvačnosti dán vztahem $J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$, kde dm je hmotnost elementu o objemu dV, ρ hustota látky, r vzdálenost elementu od osy. U pravidelného homogenního tělesa lze určit moment setrvačnosti J_T vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa a pro výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k ose rovnoběžné s touto osou použít Steinerovy věty $J = J_T + m\, d^2$, kde d značí vzdálenost obou os. Vzdálenost od osy, v níž by musela být soustředěna veškerá hmotnost tělesa m, aby její moment setrvačnosti byl stejný jako při daném rozdělení hmoty, se nazývá poloměr setrvačnosti (gyrační poloměr) R. Potom $J = m\, R^2$, odtud $R = \sqrt{\frac{J}{m}}$.

<u>**a) měření momentu setrvačnosti přímou metodou**</u>

Přímou metodu pro výpočet momentu setrvačnosti lze použít v případě, že známe hmotnost tělesa a jeho délkové rozměry. Touto metodou určíme moment setrvačnosti obdélníkové desky , pro kterou je vzhledem k ose jdoucí středem desky kolmo k její rovině $J_T = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$, kde m je hmotnost desky, a,b délky jejích stran.

Postup měření:

Délkové rozměry desky měříme vždy desetkrát měřítkem děleným na milimetry, odhadujeme desetiny milimetru a měříme v různých místech desky a při různé poloze měřítka vzhledem k desce. Určíme chybu měření ze součtu kladných odchylek od aritmetického průměru. Hmotnost desky určíme vážením na technických vahách. Chybu v určení hmotnosti můžeme zanedbat. Střední chyba v určení momentu setrvačnosti obdélníkové desky je určena vztahem $\overline{\sigma}J_T = \frac{m}{6}\sqrt{(a\overline{\sigma}a)^2 + (b\overline{\sigma}b)^2}$. V případě skutečně homogenní desky o stejnoměrné tloušťce je určení momentu setrvačnosti přímou metodou velmi přesné.

b) měření momentu setrvačnosti z doby kyvu

Pro dobu kyvu fyzického kyvadla kolem vodorovné osy procházející ve vzdálenosti d od těžiště platí vztah $T = \pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$, kde J je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení, m hmotnost kyvadla . Odtud vyjádříme moment setrvačnosti $J = \frac{T^2}{\pi^2}mgd$. Pomocí Steinerovy věty pak vypočteme moment setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm $J_T = J - md^2$.

Postup měření:

Deska, jejíž moment setrvačnosti měříme, je opatřena kruhovými otvory, do nichž zasunujeme trojboký hranol, jehož břit určuje osu otáčení. Předpokládáme, že těžiště desky je totožné s jejím středem, vliv kruhových otvorů zanedbáme.

1. Pětkrát změříme vzdálenost d osy od těžiště.
2. Postupnou metodou po deseti kyvech změříme pro danou osu dobu kyvu T (celkem měříme 100 kyvů). Výsledky měření zapíšeme do tabulky.

Vzdálenost osy			Doby kyvu			
N	d[cm]	Δ[cm]	t_1 [s]	t_2[s]	$50T = t_2 - t_1$ [s]	Δ[s]
1						
2						
3						
4						
5						

Určíme nejistotu měření $\overline{\sigma}d$ a $\overline{\sigma}(50T)$, dále určíme dobu jednoho kyvu , její nejistotu a vypočítáme moment setrvačnosti vzhledem k dané ose. Střední nejistota výsledku je dána vztahem $\overline{\sigma}J = J\sqrt{\left(\frac{\overline{\sigma}d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2\overline{\sigma}T}{T}\right)^2}$. Nejistotu v určení hmotnosti zanedbáváme.

3. Pomocí Steinerovy věty vypočteme moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm.
4. Určíme nejistotu výrazu md^2 a J_T pomocí vztahů: $\overline{\sigma}(md)^2 = md^2.\frac{2\overline{\sigma}d}{d} = 2md\overline{\sigma}d$

$$\overline{\sigma}J_T = \sqrt{(\sigma J)^2 + \left[\sigma(md)^2\right]^2}\,.$$

Měření opakujeme pro několik různých vzdáleností osy od těžiště a výsledky měření sestavíme do přehledné tabulky. Ze všech vypočtených hodnot J_T určíme aritmetický průměr a jeho chybu. Jestliže jsme měřili při pěti nebo více vzdálenostech osy od těžiště, počítáme střední nejistotu ze součtu čtverců odchylek jednotlivých hodnot J_T od aritmetického průměru. V tomto případě není třeba určovat nejistoty $\overline{\sigma}J, \overline{\sigma}(md)^2, \overline{\sigma}J_T$ pro jednotlivá měření. Je-li měření méně než pět, vypočteme střední nejistotu výsledku ze vztahu $\overline{\sigma}J_T = \frac{1}{n}\sqrt{(\overline{\sigma}J_{T_1})^2 + \ldots + (\overline{\sigma}J_{T_n})^2}$.

c) měření momentu setrvačnosti pomocí přídavného tělíska

Metoda se používá v případě, že osa otáčení tělesa prochází těžištěm. Samotné těleso (bez přídavného tělíska) nekývá, protože je v indiferentní poloze. Aby těleso kývalo, je třeba k němu připevnit další těleso, jehož moment setrvačnosti J_1 známe. Moment setrvačnosti tělesa vyjádříme pomocí Steinerovy věty $J_1 + m_1 d_1^2$, kde m_1 je hmotnost přidaného tělesa, d_1 je vzdálenost těžiště přidaného tělesa od osy otáčení. Celkový moment setrvačnosti obou těles vzhledem k ose otáčení je $J_T + J_1 + m_1 d_1^2$. Hmotnost obou těles je $m + m_1$, vzdálenost těžiště od osy otáčení je $d = \frac{m_1 d_1}{m + m_1}$. Pro dobu kyvu potom platí $T = \pi\sqrt{\frac{J_T + J_1 + m_1 d_1^2}{m_1 g d_1}}$ a odtud pro hledaný moment setrvačnosti máme $J_T = \frac{T^2}{\pi^2} m_1 g d_1 - J_1 - m_1 d_1^2$.

Postup měření:

1. Vážením na technických vahách určíme hmotnost přídavného tělíska m_1.
2. Posuvným měřítkem změříme průměr přídavného tělíska, určíme jeho poloměr. Vypočteme moment setrvačnosti J_1 podle vztahu $J_1 = \frac{1}{2} m_1 r^2$ (tělísko má tvar válce).
3. Změříme vzdálenost d_1 těžiště tělíska od osy otáčení, tělísko upevníme a změříme dobu kyvu T.Všechny délky měříme pětkrát, dobu kyvu měříme postupnou metodou po 10 kyvech (celkem 100 kyvů).
4. Měření provedeme pro různé vzdálenosti přídavného tělíska od osy otáčení. Výsledky měření zapíšeme do tabulky.
5. Vypočítáme průměrnou hodnotu J_T a stanovíme její střední nejistotu.

Úloha č. 3: ***Měření Youngova modulu pružnosti***

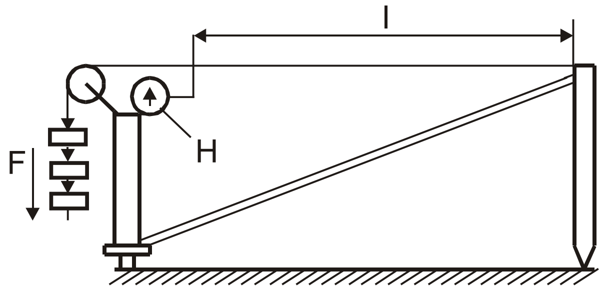
Youngův modul udává vztah mezi napětím $\frac{F}{S}$ a deformací (relativním prodloužením) $\frac{\Delta l}{l_o}$ tahem, pro který platí Hookův zákon $\frac{\Delta l}{l_o} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$, kde Δl značí prodloužení, l_o původní délku vzorku, F tahovou sílu, S průřez vzorku. Jednotkou modulu pružnosti v tahu je 1 Pa. Modul pružnosti ve smyku G udává vztah mezi smykovým napětím a smykovou deformací γ ve tvaru $\gamma = \frac{1}{G}\frac{F}{S}$, kde γ je úhel smyku, F smyková síla, S plocha, ve které působí smyková síla F. Jednotkou je 1 Pa.

a) měření Youngova modulu z protažení drátu

Metoda je založena na Hookově zákonu, je to metoda statická. Působí-li na drát délky l a průřezu S síla F ve směru délky, prodlouží se drát o délku y, pro kterou platí $y = \frac{1}{E}\frac{F}{S}l$, kde E je hledaný modul pružnosti v tahu. Platí $E = \frac{Fl}{Sy}$. Měříme-li drát o kruhovém průřezu s poloměrem r, pak lze vztah upravit na tvar $E = \frac{Fl}{\pi r^2 y}$.

Postup měření:

K měření použijeme zařízení podle obr. 3. Drát je na jednom konci upevněn, na druhém je zatěžován závažím . Prodloužení měříme číselníkovým úchylkoměrem (hodinkový indikátor) H.



Obr. 3: *Měření Youngova modulu*

1. Drát zatížíme závažím o hmotnost 0,5 kg a změříme desetkrát jeho délku l . Odečet provádíme na desetiny milimetru, měníme polohu měřítka. Měření zapíšeme do tabulky.
2. Vypočteme průměrnou hodnotu délky l a pomocí druhých mocnin odchylek její střední nejistotu.
3. Mikrometrem změříme průměr drátu. Měření opakujeme desetkrát, desetkrát měříme také nulovou polohu mikrometru. Výsledky zapíšeme do tabulky.
4. Vypočteme poloměr drátu r. Skutečný průměr drátu $d = d_1 - d_o$, střední nejistota $\overline{\sigma} d = \sqrt{(\overline{\sigma} d_1)^2 + (\overline{\sigma} d_o)^2}$, $r = \frac{d}{2}$, nejistota $\overline{\sigma} r = \frac{1}{2}\overline{\sigma} d$.
5. Postupnou metodou změříme prodloužení drátu – drát zatěžujeme závažím, jehož hmotnost zvyšujeme po 0,5 kg do hodnoty 4 kg. Provedeme 2n měření při rostoucím a klesajícím zatížení. Výsledky zapíšeme do tabulky.

6. Vypočteme aritmetický průměr z hodnot y, každá hodnota znamená prodloužení při změně závaží o n.0,5 kg. Z těchto hodnot určíme také aritmetický průměr a nejistotu měření. Vypočteme sílu $F = m\,g$, kde m = n.0,5 kg.
7. Vypočteme modul pružnosti v tahu . Za g dosazujte g = 9,81 m.s^{-2} . Sestrojíme graf závislosti prodloužení na hmotnosti závaží.
8. Vypočteme střední nejistotu v určení modulu pružnosti v tahu

$$\bar{\sigma}E = E\sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}y}{y}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{\sigma}r}{r}\right)^2}\ .$$

9. Vypočtenou hodnotu porovnáme s tabulkovou hodnotou.

b) měření modulu pružnosti v tahu z příčných kmitů tyče

Uvedená metoda je příkladem dynamické metody měření Youngova modulu. Je-li tyč délky l na jednom konci upevněna, pak síla F, působící na opačném konci, způsobí prohnutí y, pro něž z teorie pružnosti plyne vztah $y = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ_p}F$. Ve vztahu je J_p plošný moment setrvačnosti průřezu tyče vzhledem k ose jdoucí těžištěm kolmo k působící síle a ležící v rovině průřezu, E je modul pružnosti v tahu. Odtud lze vyjádřit sílu $F = \frac{3EJ_p}{l^3}y$. Jestliže tyč vychýlíme a pustíme, koná kmitavý pohyb, pro který platí pohybová rovnice $F = m_1 a = -\frac{3EJ_p}{l^3}y$, kde m_1 je hmotnost úměrná hmotnosti kmitající části tyče. Srovnáme-li tento vztah s pohybovou rovnicí harmonického pohybu, máme $E = \frac{4\pi^2 l^3 m_1}{3J_p T^2}$, kde T je doba kmitu tyče. Máme-li tyč obdélníkového průřezu s rozměrem b ve směru kmitání a rozměrem c kolmým k tomuto směru, pak $J_p = \frac{1}{12}b^3 c$ a Youngův modul $E = \frac{16\pi^2 l^3 m_1}{b^3 c T^2}$.

Hmotnost m_1 tyče nelze určit vážením – tyč je upevněna, tzn. část tyče nekmitá a zbývající body tyče kmitají s různou amplitudou, takže se neuplatní stejně. Hmotnost m_1 určíme takto:

a) změříme dobu kmitu T tyče bez závaží. Platí $m_1\,a = -K\,y$, $\varpi^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{K}{m_1}$.

b) Na konec tyče připevníme závaží o hmotnosti m (těžiště závaží musí ležet právě na konci tyče). Při kmitání se uplatní celá hmotnost tohoto tělesa, protože je umístěno v místě největšího rozkmitu. Platí $\varpi_1^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{K}{m_1 + m}$, kde T_1 je doba kmitu tyče se závažím.

c) Vydělením obou rovnic máme $\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{m_1}{m + m_1}$, pružnost K je v obou případech stejná. Odtud lze vyjádřit hledanou hmotnost $m_1 = \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}m = \frac{T^2}{(T_1 + T)(T_1 - T)}m$.

e) Výraz pro výpočet m_1 dosadíme do vztahu pro určení modulu pružnosti

$$E = \frac{16\pi^2 l^3 m}{b^3 c(T_1 + T)(T_1 - T)}.$$

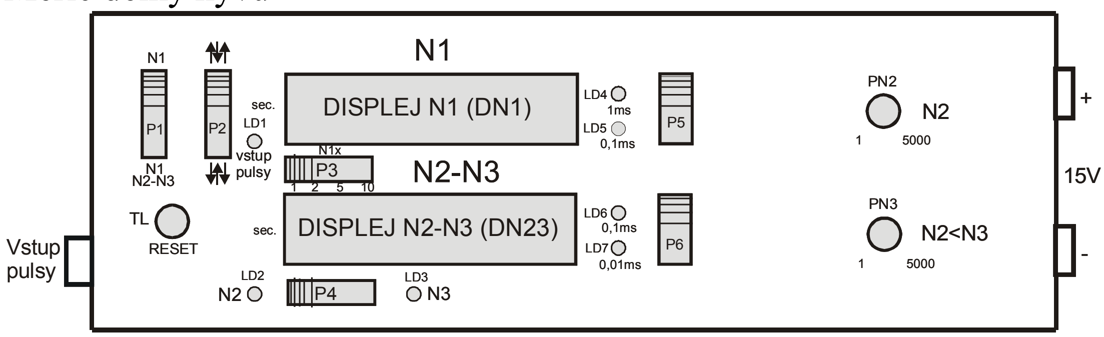
Postup měření:

1. Určíme rozměry tyče – desetkrát změříme délku volné části tyče po jejím upevnění . Mikrometrem změříme desetkrát rozměr b , přičemž nejdříve stanovíme desetkrát nulovou polohu mikrometru. Rozměr c měříme posuvným měřítkem. Rozměry měříme na různých místech tyče, výsledky zapíšeme do tabulky. Určíme střední nejistoty pomocí součtu druhých mocnin odchylek.
2. Hmotnost závaží m určíme vážením na technických vahách.
3. Pomocí měřiče kmitů změříme desetkrát dobu trvání 100 kmitů samotné tyče. Potom na konec tyče upevníme závaží o hmotnosti m a postup opakujeme. Pro kontrolu lze měřičem kmitů určit také dobu trvání např. 10., 20., atd. kmitu. Střední nejistoty počítáme opět pomocí součtu druhých mocnin odchylek.
4. Vypočteme modul pružnosti E. Pro střední nejistotu výsledku platí

$$\overline{\sigma}E = E\sqrt{\left(\frac{3\overline{\sigma}b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\sigma}c}{c}\right)^2 + \left[\frac{\overline{\sigma}(T_1 + T)}{(T_1 + T)}\right]^2 + \left[\frac{\overline{\sigma}(T_1 - T)}{(T_1 - T)}\right]^2 + \left(\frac{3\overline{\sigma}l}{l}\right)^2}\,.$$

5. Máme-li k dispozici dvě závaží o různé hmotnosti, lze změřit dobu kmitu nejprve s jedním závažím, potom měření opakovat pro druhé závaží a do vztahu pro výpočet E potom za hmotnost m dosadit rozdíl hmotností obou závaží.
6. Vypočtenou hodnotu porovnáme s tabulkovou hodnotou pro daný materiál a s hodnotami určenými pomocí jiných metod.

Měřič délky kyvu



Obr. 4: *Čelní panel měřiče délky kyvu*

Napájení měřiče: externě ze zdroje **15 V/O,3 A.** ***Nepřipojovat vyšší napětí !!!!***

Délka kyvu je snímána optoelektronicky a zobrazena na displeji DN1, DN23 (v sekundách). Rozlišení posledního řádu displeje se přepíná přepínači P5 (1ms – indikace LD4, 0,1 ms – indikace LD5) a P6 (0,1 ms – indik. LD6, 0,01 ms – indikace LD7).

Tlačítko TL slouží k nastavení a vynulování měřiče.Tlačítko je kvůli překmitům nastaveno na časovou prodlevu cca 2 s, za kterou je možno znovu resetovat měřič po předchozím stisknutí TL.
Přepínač P1 určuje, bude-li měřeno jen na displeji DN1 – poloha N1, nebo na obou displejích zároveň (DN1 a DN2) – poloha N1-N2-N3.
Dioda LD1 indikuje vstupní impulsy.

Přepínač P2 určuje, zda měříme dobu kyvu ihned po rozkmitu kyvadla – poloha ↑↓↑ nebo s prodlevou jednoho kmitu – poloha ↓↑↓.

Přepínač P3 určuje, měříme-li délku kyvu (od začátku měření) s násobkem 1,2,5,10. Podle polohy přepínače P3 displej DN1 měří délku jednoho až 10ti period kyvu kyvadla.

Přepínač P4 je funkční jen při poloze přepínače P1 na N1-N2-N3 a indikuje, kolikátou periodu doby kyvu od začátku měření měří displej DN23 (v závislosti na poloze přepínače PN2, PN3. Pokud je P4 v poloze N3, pak pro správnou funkci měření musí být splněno, že hodnota PN2 je menší než hodnota PN3.
Displej DN23 ukazuje hodnotu „N2“ po dobu 10ti vteřin (svítí LD2) a poté ukazuje hodnotu „N3“ (svítí LD3).

Nové měření začíná po stisknutí tlačítka TL.

Úloha č. 4: ***Spřažená kyvadla – měření na spřažených kyvadlech pomocí programu SCOPE WIN***

Jsou-li dva stejné oscilátory se stejnou vlastní kruhovou frekvencí vázány pružinou platí pro jejich klidovou polohu a malou výchylku ϕ způsobenou gravitací a napětím pružiny tyto pohybové rovnice: vliv gravitace vyjadřuje moment síly $M_{so} = mgL\sin\phi_o \sim mgL\phi_o$, vliv vazby (pružiny) moment síly $M_{Fo} = -k\,y_o\,L\cos\phi_o \sim -k\,y_o\,L$, kde k je tuhost pružiny, y_o natažení pružiny, l délka vazby, m hmotnost kyvadla, L délka kyvadel, g gravitační zrychlení, ϕ_o úhel, který kyvadlo svírá v klidové poloze se svislou osou. Vychýlíme-li nyní kyvadlo 1 o úhel ϕ_1 a kyvadlo 2 o úhel ϕ_2, lze pohybové rovnice kyvadel psát ve tvaru

$J\dfrac{d^2\phi}{dt^2} = M$, kde J je moment setrvačnosti.

Pro kyvadlo 1 máme $J\dfrac{d^2\phi_1}{dt^2} = M_1 = -mgL\phi_1 + kl^2(\phi_2 - \phi_1)$ a pro kyvadlo 2

$J\dfrac{d^2\phi_2}{dt^2} = M_2 = -mgL\phi_2 - kl^2(\phi_2 - \phi_1)$. Do těchto vztahů můžeme dále dosadit výrazy

$\omega_o^2 = \dfrac{mgL}{J}, \Omega^2 = \dfrac{kl^2}{J}$. Po úpravě máme

$$\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \omega_o^2\phi_1 = -\Omega^2(\phi_1 - \phi_2)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{dt^2} + \omega_o^2\phi_2 = -\Omega^2(\phi_1 - \phi_2)$$

Řešení těchto pohybových rovnic a tím i kmitání oscilátorů závisí na počátečních podmínkách. Budeme uvažovat tři případy počátečních podmínek:

A. $\phi_1 = \phi_2 = \phi_A$, $\frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 0$, pohybová rovnice má řešení ve tvaru

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_A \cos\omega_o t$$

B. $-\phi_1 = \phi_2 = \phi_A, \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 0$, řešení pohybových rovnic je ve tvaru

$$\phi_1(t) = \phi_A \cos\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2}\,t$$

$$\phi_2(t) = -\phi_A \cos\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2}\,t$$

C. $\phi_1 = \phi_A, \phi_2 = 0, \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 0$, řešení pohybových rovnic

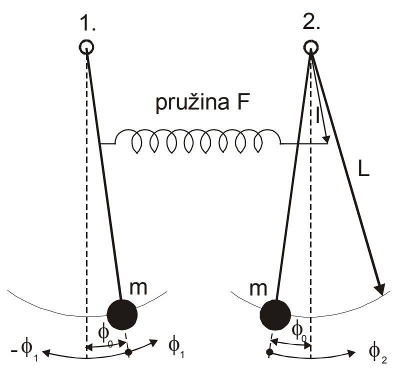
$$\phi_1(t) = \phi_A \cos\frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} - \omega_o}{2} t . \cos\frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} + \omega_o}{2} t$$

$$\phi_2(t) = -\phi_A \sin\frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} - \omega_o}{2} t . \sin\frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} + \omega_o}{2} t .$$

Odtud vyplývá, že v případě A. kmitají oba oscilátory se stejnou amplitudou a stejnou vlastní úhlovou frekvencí $\omega_g = \omega_o$. V případě B. mají oba oscilátory opět stejnou amplitudu a stejnou vlastní úhlovou frekvenci ω_g, ale je zde fázový posun o velikosti π. Oscilátory kmitají s druhou základní úhlovou frekvencí $\omega_c = \sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2}$. Tato frekvence závisí na délce vazby l. V případě C. je-li vazba slabá, jsou obě základní frekvence blízké a úhlové frekvence oscilátorů lze vyjádřit jako

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} - \omega_o}{2} = \frac{\Omega^2}{2\omega_o}, \omega_2 = \frac{\sqrt{\omega_o^2 + 2\Omega^2} + \omega_o}{2} = \omega_o + \frac{\Omega^2}{2\omega_o} ..$$

Chceme-li vyjádřit stupeň vazby mezi oscilátory, použijeme tzv. stupeň vazby $\kappa = \frac{kl^2}{mgL + kl^2} \Rightarrow \kappa = \frac{\Omega^2}{\omega_o^2 + \Omega^2}$. V případě B. vychází stupeň vazby $\kappa = \frac{\omega_c^2 - \omega_o^2}{\omega_c^2 + \omega_o^2}$, v případě C. je $\kappa = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$.



Obr. 5: *Spřažená kyvadla*

Modul ScopeWin a jeho použití při měření se spraženými oscilátory

1. Úvod

Modul ScopeWin umožňuje rychlá měření dynamických jevů i dlouhodobá monitorování signálů, jejich vizualizaci v reálném čase, následné zpracování pomocí řady výkonných nástrojů, archivaci a prezentaci v podobě tištěných protokolů. Základní vlastnosti měření a zpracování dat modulu ScopeWin lze shrnout do těchto bodů:

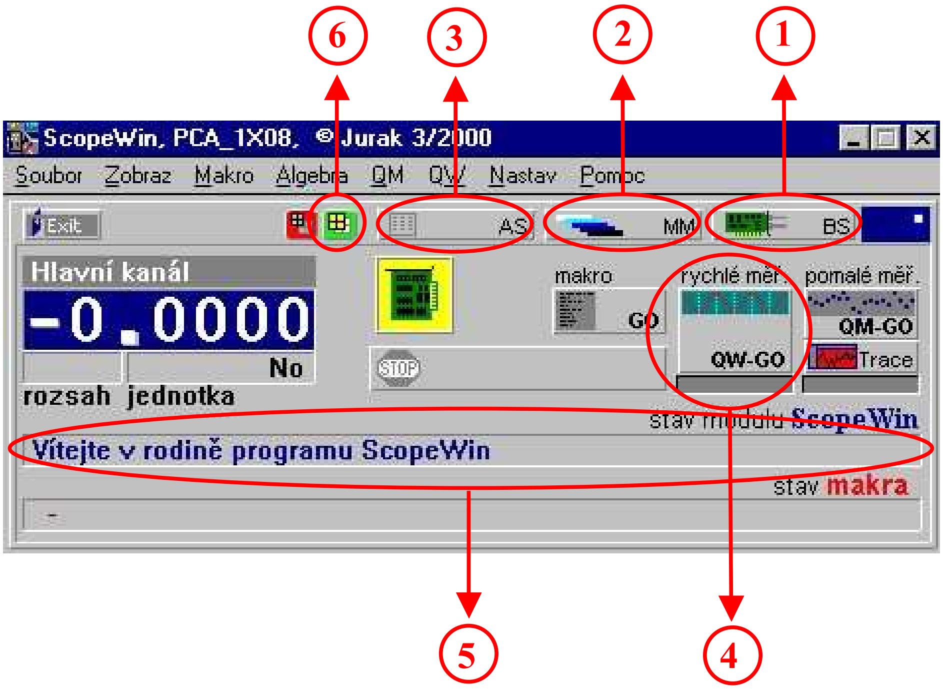
a) Existují dva typy měření – **pomalé** (monitorování do 10 Hz, označované QM) a **rychlé** (vlna, označované QW). Lze kombinovat rychlé a pomalé měření.
b) Data se ukládají v paměti do tzv. **kanálů**. Pro každý kanál lze otevřít grafické okno. V jednom grafickém okně lze na pozadí kanálu, který oknu přísluší a jemuž odpovídají stupnice, zobrazit libovolně další kanály. Grafická okna jsou vybavena řadou funkcí a horkých kláves.
c) U pomalého měření lze sledovat data v reálném čase měření v trasovacích oknech. Současně lze otevřít i grafická okna, ve kterých se data zobrazí po nasnímání nastavené délky. Data v grafickém okně lze prohlížet a zpracovávat i v průběhu měření. Data v trasovacích oknech zpracovávat nelze.
d) Data lze tisknout z grafických oken (horká klávesa T respektive kliknutím na ikonu pro tisk).
e) Parametry měření se nastavují v **AS dialogu**. **AS dialog** má stránkovou strukturu a každý kanál má vlastní nastavení. Pro samotné měření je důležitý tzv. **Hlavní kanál**. Tento kanál je určující pro stanovení vzorkovací frekvence, délky bloku data a podobně.
f) Při záznamu do paměti mají všechny kanály stejnou vzorkovací frekvenci a stejnou délku.
g) Který kanál je hlavní, které kanály budou snímány a které kanály se mají zobrazit v grafických oknech na obrazovce určuje **MM dialog**.
h) Každý kanál je třeba správně propojit na HW analogový vstup. K tomu slouží **BS dialog**. **BS dialog** má stejně jako **AS dialog** stránkovou strukturu. Každá stránka odpovídá jednomu kanálu. Pro každý kanál je třeba nastavit správně bázovou adresu karty a číslo analogového vstupu. Pozor – kanály jsou číslovány od 1, analogové vstupy na kartách (MPX) od nuly. Pokud používáte rychlé snímání, pak jsou data většinou čtena z jedné karty. Bázová adresa je v takovém případě dána nastavením bázové adresy v **Hlavním kanále**.
i) Kompletní nastavení modulu ScopeWin lze uložit do diskových stavových souborů. Lze tak kdykoliv obnovit požadované pracovní nastavení. Stavové soubory neobsahují data. Ta se ukládají odděleně do datových souborů.

V dalším výkladu se zaměříme na popis ovládacího modulu ScopeWin s přihlédnutím k jeho využití pro měření se spřaženými oscilátory. Popíšeme pouze ty funkce programu, které jsou pro tento účel využitelné.

2. Popis a měření v modulu ScopeWin

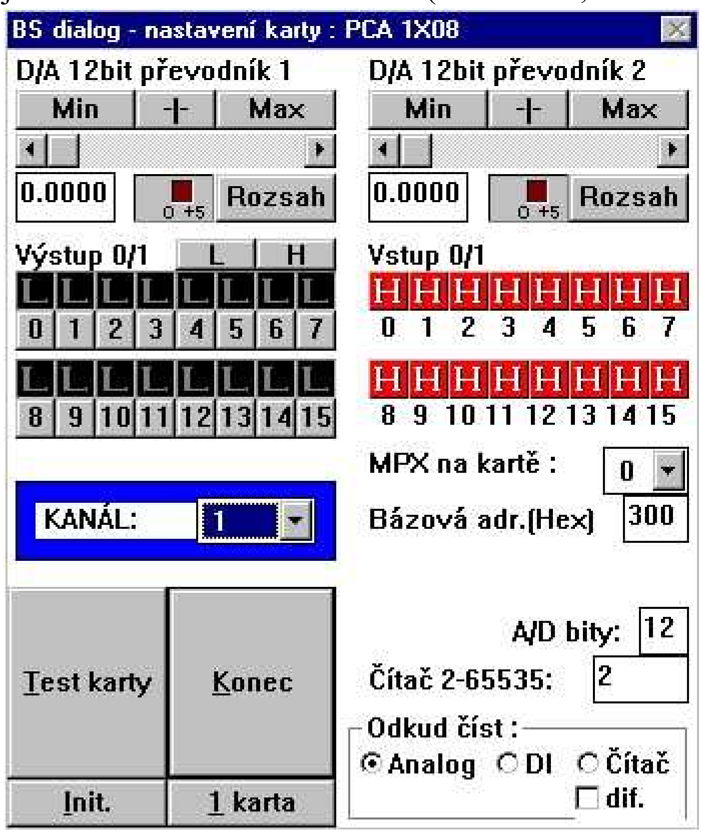
Hlavní okno (viz obr. 4.1) slouží k aktivaci funkcí modulu ScopeWin a zadávání povelů. Hlavní okno modulu ScopeWin se objeví vždy po spuštění programu a je přitomno na obrazovce po spuštění programu.

Hlavní okno lze překrývat grafickými okny s daty. Všechny funkce hlavního okna jsou dostupné z menu – horní pruh s textem Soubor, Zobraz, Makro, Algebra, QW, QM, Nastav, Pomoc.



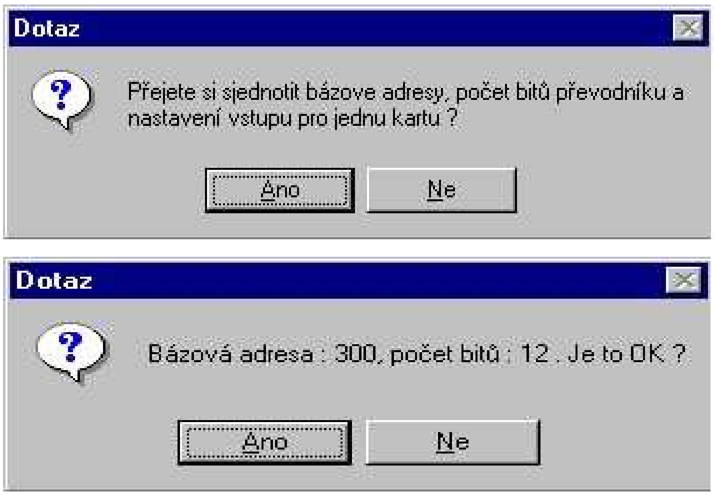
Obr. 4. 1. Hlavní okno modulu ScopeWin.

Předně něž začneme zadávat parametry měření, musíme inicializovat měřící kartu. To provedeme v **BS dialogu**, který aktivujeme kliknutím na tlačítko **BS** (viz obr.4.1, tlačítko označené 1). Objeví se nám okno, jenž je pro ilustraci zobrazeno na obr. 4.2. Pro naše měření (tj. měření se spřaženými oscilátory) budeme respektovat nastavení, které je ukázáno na obr.4.2. Jakékoliv odlišné parametry upravíme podle obr.4.2. Nyní provedeme inicializaci měřící karty. Jelikož se v počítači nachází pouze jedna měřicí karta, je vhodné provést test karty stisknutím tlačítka **TEST KARTY** (viz obr.4.2). Tím se prověří komunikace počítače s měřicí kartou. Dále knikneme na tlačítko **1 KARTA** (viz obr.4.2) a potvrdíme následující dvě dialogové okna (viz obr. 3), což nastaví stejnou bázovou adresu pro všechny kanály. MPX nastaví od 0, přičemž 0 odpovídá



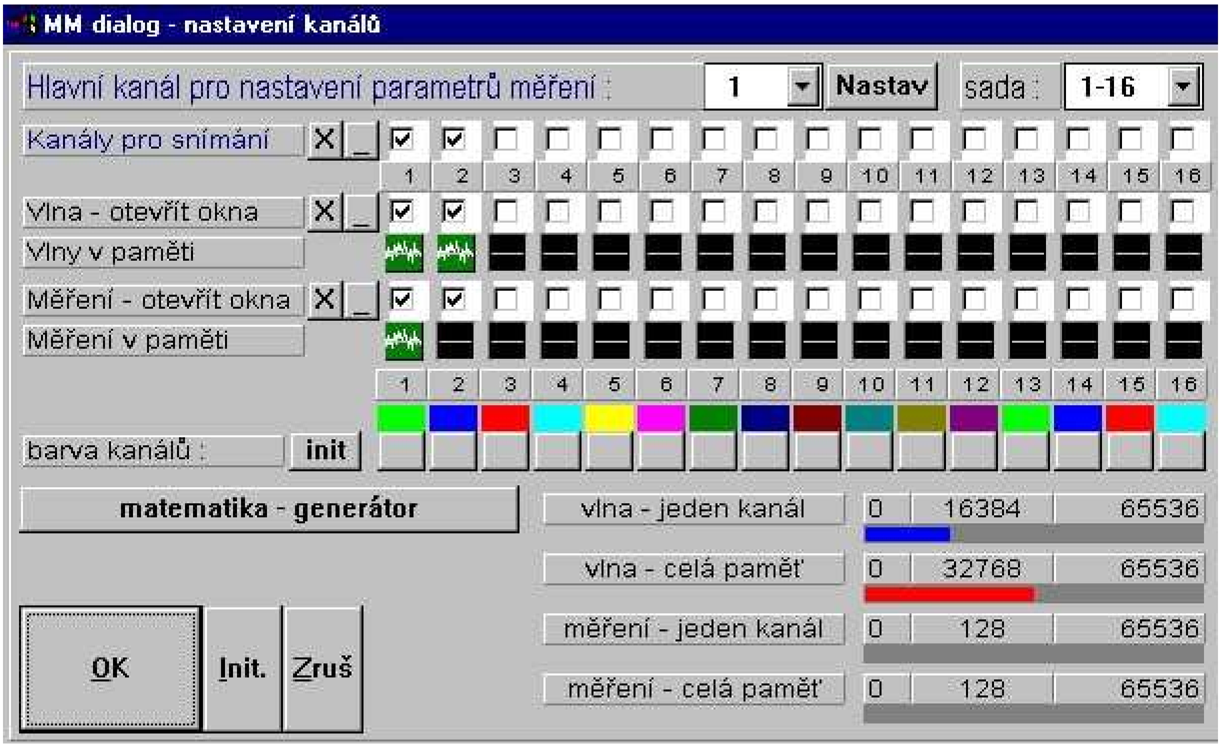
Obr. 4.2. BS dialog.

prvnímu kanálu, 1 odpovídá druhému kanálu, 2 odpovídá třetímu kanálu a podobně. Tím je inicializace měřicí karty dokončena, což potvrdíme kliknutím na tlačítko **KONEC** (obr.4. 2).



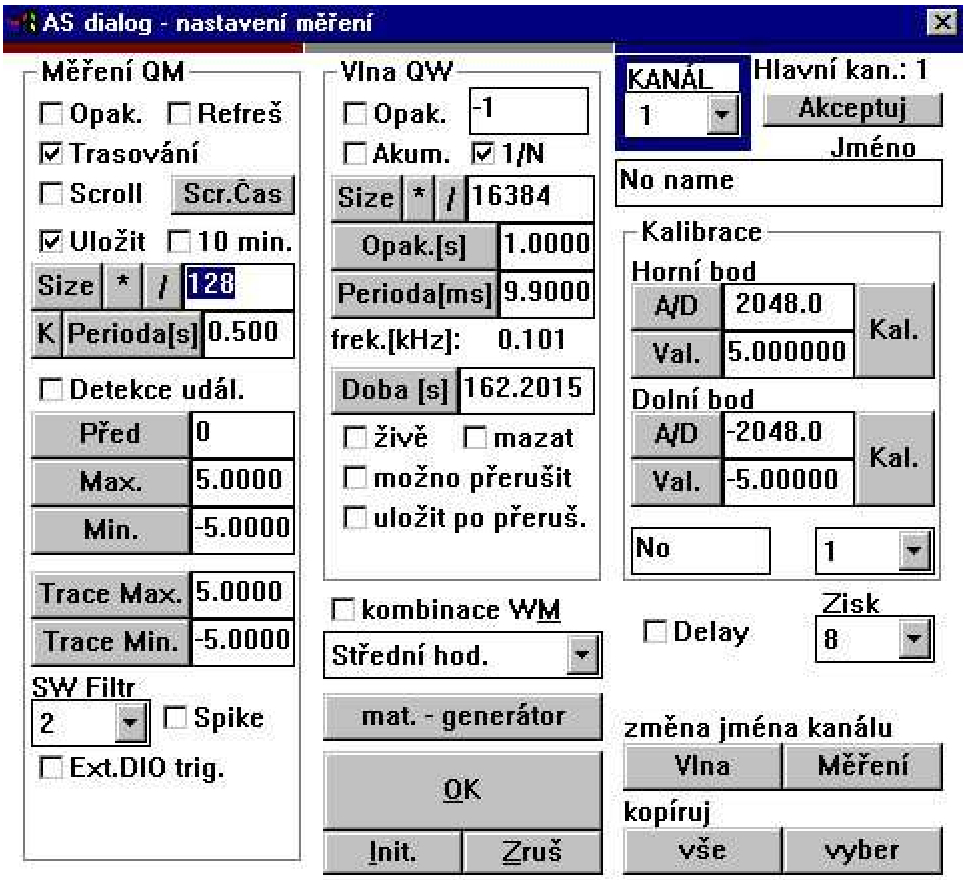
Obr. 4.3. Inicializace měřicí karty.

Nyní provedeme nastavení měřicích kanálů v **MM dialogu**. Tento dialog aktivujeme v hlavním okně kliknutím na tlačítko označené **MM** (viz obr. 1, tlačítko onačené 2). **MM dialog** (viz obr. 4.4) je dialogový panel pro nastavení parametrů pro snímání z více kanálů současně. Umožňuje nastavit kanály pro záznam, zvolit grafická okna pro zobrazení a v případě vícekanálového zobrazení v jednom grafickém okně nastavení barev jednotlivých kanálů. V našem případě zpracováváme data ze dvou kanálů a proto provedeme zaškrtnutí podle obr. 4.3. Barvu příslušných kanálů můžeme měnit kliknutím na příslušné políčku v řádku **BARVA KANÁLŮ** (viz obr. 4.4). Nastavení potvrdíme kliknutím na tlačítko **OK**.



Obr. 4.4. MM dialog.

Nastavení parametrů měření provedeme v **AS dialogu** (viz obr.4.5), který vyvoláme tlačítkem **AS MĚŘENÍ** z hlavního okna modulu ScopeWin (viz obr. 4.1, tlačítko označené 3). Jelikož snímáme rychlé děje, budeme měření provádět v modu **Vlna QW** (tj. rychlé měření). V našem případě budeme proto upravovat parametry v okénku **Vlna QW** (viz obr. 4.5), které jsou společné pro oba kanály. Význam jednotlivých (pro měření významných) položek, je následující:



Obr. 4.5. AS dialog.

OPAK – nastavuje opakované (osciloskopické) snímání vlny. Opakováním snímání vlny se rozumí opakování záznamu dat do paměti nastavené velikosti. Počet opakování se zadává v editačním okénku vpravo vedle volby **OPAK**.

AKUM – nastavuje akumulační mód. V akumulačním modu jsou jednotlivé vlny k sobě přičítány – předpoklad nastavení **OPAK**. Akumulační mód je doporučeno použít v případech, kdy je zabezpečena synchronizace snímání jednotlivých vln. Náhodný signál je potlačován, opakující se signál nesoucí informaci je zvýrazňován.

1/N – průměrkování. Volba se uplatní pouze při nastavení **OPAK** a **AKUM**. V takovém případě se provádí průměrkování dat – součet dat je dělen celkovým počtem opakování měření. Střední amplituda dat se průměrováním nemění.

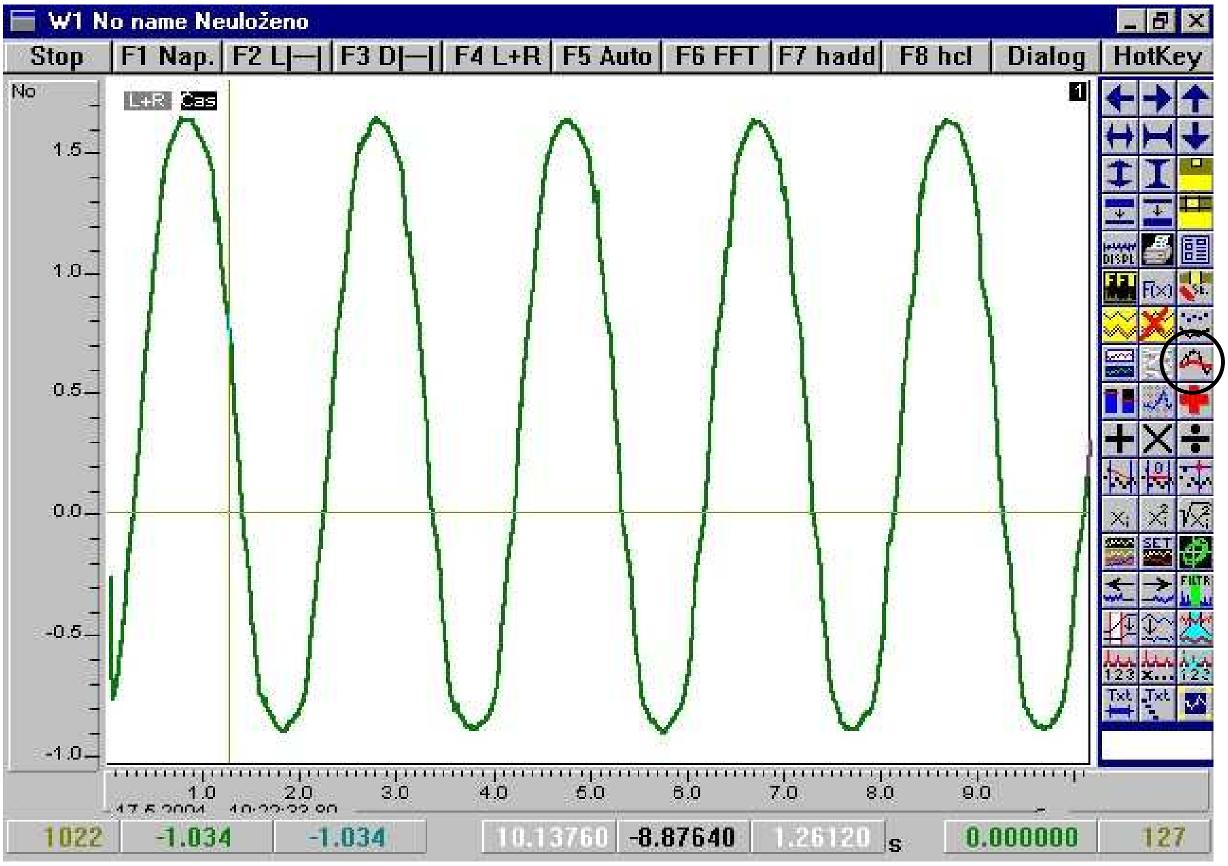
SIZE – velikost paměti pro ukládání vln. Velikost paměti lze libovolně měnit. Nastavený rozsah je určující pro maximální možný výřez dat v grafickém okně. Význam symbolů je následující: * – vynásobení velikosti paměti dvěma, / – dělení velikosti paměti dvěma. Tlačítka * a / je výhodné používat pro zachování velikosti paměti v délce mocniny dvou. Tato délka je nutná pro výpočet pro výpočet FFT (spektrální analýza).

OPAK (s) – perioda snímání vlny, jednotka sekundy. Periodou se zde rozumí perioda opakovaného čtení jednotlivých vln nikoliv perioda vzorkování jednotlivých bodů vlny.

PERIODA (ms) – perioda vzorkování jednotlivých bodů, jednotka 1 ms. Minimální vzorkovací perioda je ze strany programu omezena na 0.01 ms. Pro vzorkování je použito vnitřního časovače na kartě a softwarového testování ukončení převodu. Po zadání periody je provedena kontrola nastavení čítačů na kartě a vrácena skutečná hodnota odpovídající dosaženému dělícímu poměru.

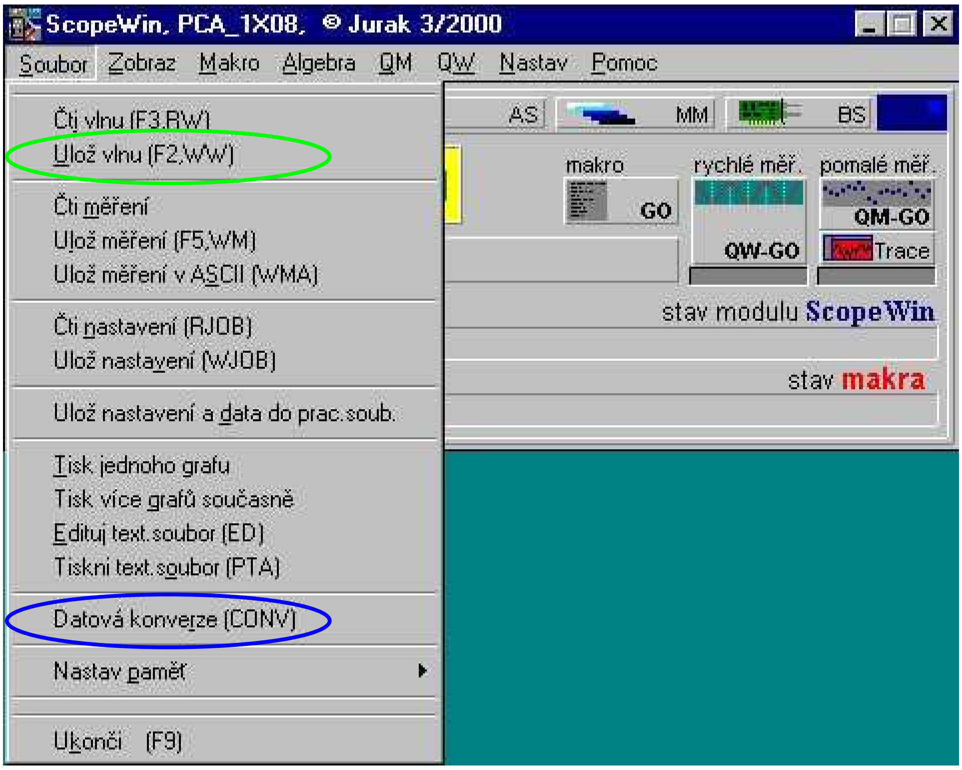
DOBA (s) – doba snímání v sekundách. Doba snímání je stanovena ze vzorkovací periody a délky bloku. Platí, že **DOBA = SIZE * PERIODA**. Při změně **SIZE** nebo **PERIODA** se automaticky přepočítá i **DOBA**. Při změně **DOBA** se přepočítá **PERIODA**, ale **SIZE** se nemění.

Další parametry jsou pro naše měření nepodstatné. Příklad nastavení parametrů měření je zobrazen na obr. 4.5. Volby **OPAK**, **AKUM** a **1/N** nejsou aktivní. Celková doba každého měření by měla být větší jak 180 sekund. To docílíme vhodným nastavením parametru **SIZE** a **PERIODA** (viz obr.4.5). **AS dialog** ukončíme kliknutím na tlačítko **OK**.

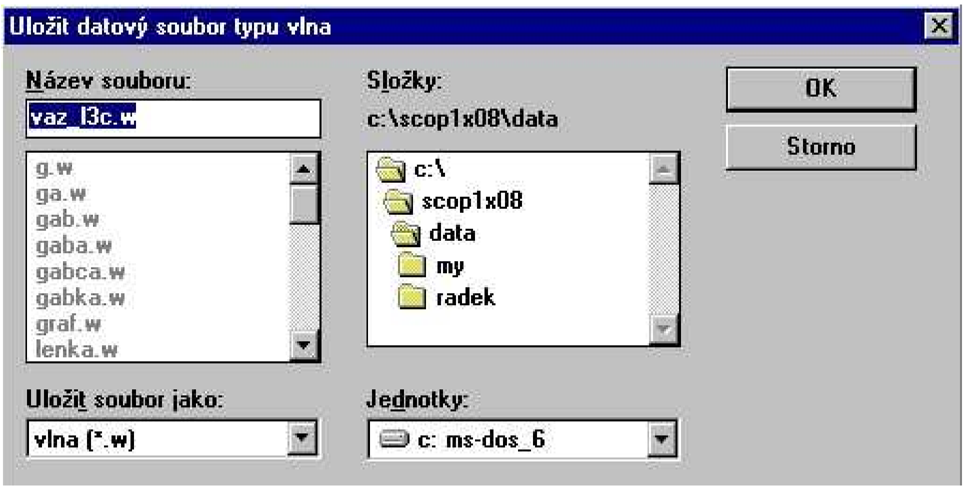


Obr. 4.6. Grafické okno.

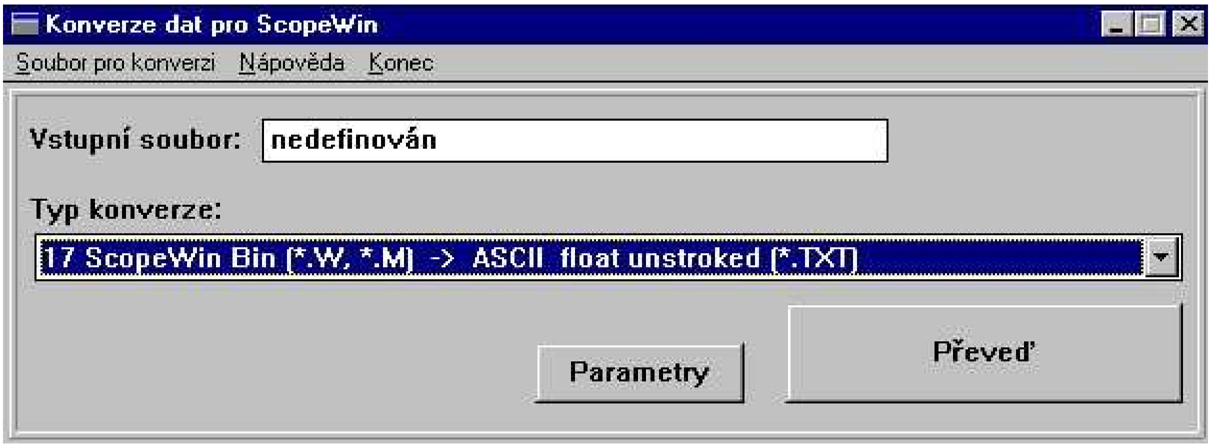
Nyní máme vše připraveno k měření. Snímání dat započteme kliknutím na tlačítko **QW-GO** umístěné v hlavním okně (viz obr. 1, tlačítko označené 4). Tlačítko **QW-GO** (rychlé měření) slouží ke spuštění rychlého měření. Měření se řídí parametry nastavenými v **MM**, **AS** a **DS dialogu**. Je-li měření spuštěno, svítí žlutá ledka pod tlačítkem **QW-GO**. Pokud je nastavena volba **VLNA – OTEVŘÍT OKNA** v **MM dialogu**, jsou nově sejmutá data v otevřeném grafickém okně ihned po uložení v paměti promítnuta. Ukončení měření je signalizováno ve stavovém řádku hlavního okna (viz obr. 4.1, oblast označená 5). Grafické okna (viz obr. 4.6) lze aktivovat po kliknutí na tlačítko označené 6 na obr. 4.1. Okno pro grafické zpracování dat nabízí práci s kurzory, výřezy, stupnici, rastr, měření vzdálenosti, zobrazení amplitudy, výkonu, integrálu a derivace, reálnou přímou a inverzní FFT, odstranění stejnosměrné složky, porovnání více průběhů uložením do video paměti. Jelikož data budeme vyhodnocovat v EXCELU, volbami grafického okna se nebudeme zabývat. Pro náš případ pouze využijeme funkci **VYHLAZOVÁNÍ DAT** (horká klávesa CTRL+M), která vyhladí nežádoucí přeskoky způsobené potenciometry. Vyhlazování aktivujeme stisknutím tlačítka označeného černým kroužkem na obr.4.6, přičemž lze zadat 3 stupně vyhlazení (většinou stačí použít 1. stupeň).



Obr. 4.7. Nabídka Soubor modulu ScopeWin.

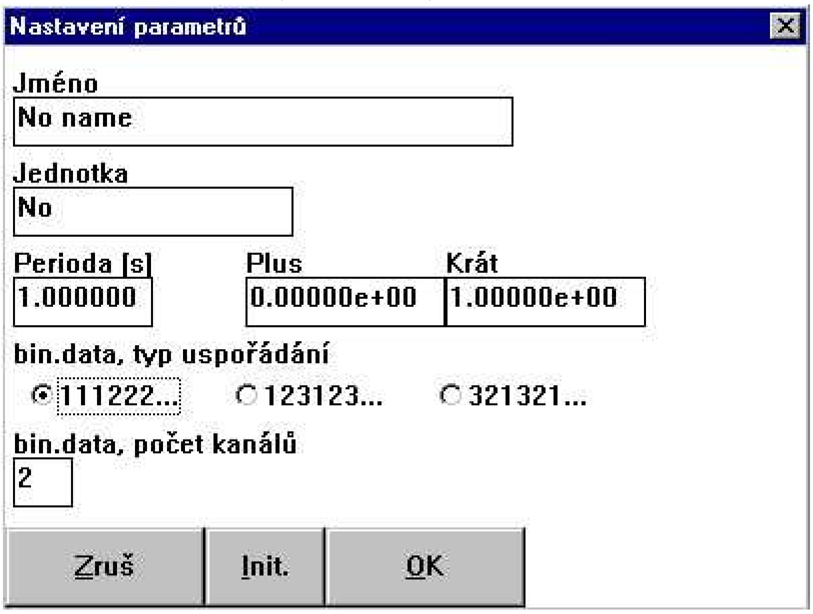


Obr.4. 8. Uložení dat.



Obr. 4.9. Datová konverze.

Naměřené průběhy uložíme pomocí příkazu **ULOŽ VLNU (F2,WW)** v nabídce **SOUBOR** v hlavním okně (viz obr. 4.7, zelená elipsa). Tím se otevře panel pro uložení dat (viz obr.4.8). Soubor pojmenujeme a uložíme. Soubor bude mít příponu *.w. Abychom je mohli dále v EXCELU zpracovat, potřebujeme ho avšak převést do textového formátu. To provedeme příkazem **DATOVÁ KONVERZE (CONV)**, který je rovněž umístěn v nabídce **SOUBOR** (viz obr.4.7, modrá elipsa). Po jeho aktivaci se zobrazí panel, jenž je znázorněn na obr. 4.9. Příkazem SOUBOR PRO KONVERZI vybereme soubor, jenž chceme převést. TYP KONVERZE volíme podle toho, v jakém tvaru požadujeme výstupní soubor. Pro textový formát je vhodný typ označený **17 ScopeWin Bin (*.W,*.M) → ASCII float unstroked (*.TXT)**. Dále klikneme na tlačítko PARAMETRY (viz obr.4.9) a zkontrolujeme, zda-li volitelné parametry odpovídají podle obr.4.10. Tím totiž dostáváme výstupní textový soubor, který obsahuje dva sloupce, první příslušející prvnímu kanálu a druhý odpovídající druhému kanálu. Dialog **Nastavení parametrů** uzavřeme kliknutím na tlačítko **OK** (viz obr.4.10). Toto nastavení parametrů se nemění po celou dobu práce s modulem ScopeWin. Poté klikneme na tlačítko **PŘEVEĎ** (viz obr. 4.9), čímž se



Obr. 10. Parametry datová konverze.

otevřel panel **Interval** (obr. 4.11), ve kterém specifikujeme počet vzorků, které chceme exportovat do textového formátu. Ve většině případů převádíme všechny vzorky. Po kliknutí na tlačítko se aktivuje další dialog s názvem **Kanály** (viz obr. 4.12), kde určujeme kanály,

Obr. 11. Dialog Interval.

Obr. 12. Dialog Kanály.

jejichž data budou převedena do textové podoby. Po kliknutí na tlačítko **OK** dojde k převodu, přičemž informace o umístění textového souboru je zobrazena na obrazovce. Textový soubor pak je uložen v adresáři **C:\SCOP1X08\DATA**.

3. Převod souboru do tvaru zpracovatelném v EXCELU

Abychom mohli s právě vytvořeným textovým souborem pracovat v EXCELU, je nutné ho zbavit desetinných teček a nadbytečných mezer (český EXCEL pracuje s desetinnými čárkami a odstraňování nadbytečných mezer by v EXCELU bylo velmi pracné). K tomu použijeme program s názvem **PREVOD**, který je rovněž umístěn v adresáři C:\SCOP1X08\DATA\. Syntaxe programu **PREVOD** je následující:

prevod vstupní_soubor.txt výstupní_soubor.txt

kde vstupní_soubor.txt je soubor určený k převodu a výstupní_soubor.txt je název upraveného souboru. Tím dostáváme textový soubor, který můžeme vložit do EXCELU a dále s ním pracovat (tj. vyhodnotit měření se spraženými oscilátory, vytvářet grafy, odečítat příslušné periody kmitů kyvadel a podobně).

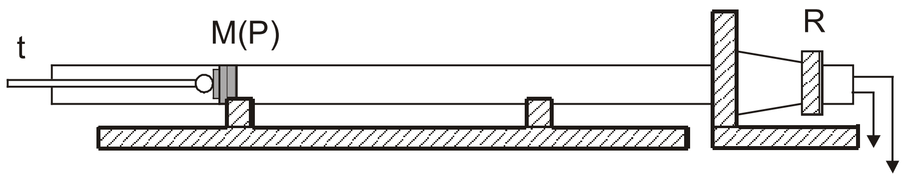
Úloha č. 5: *Základní akustická měření*

a) měření pomocí Kundtovy trubice

Kundtova trubice je skleněná trubice naplněná plynem o kruhovém průřezu 3 až 7 cm. V této trubici zkoumáme polohy kmiten a uzlů stojatých akustických vln buď elektroakustickou sondou nebo prostřednictvím obrazců kmiten a uzlů vytvářených pomocí jemného suchého prášku (korková drť, plavuň, hliníkové piliny) vlivem akustického pole. Trubice může být otevřená, na jednom konci uzavřená nebo opatřená pohyblivým pístem. Při odrazu vlny na otevřeném konci je třeba přihlížet k deformaci koncové čvrtvlny vlivem nedokonalého odrazu akustické vlny na volném konci. Trubice může být plněna i jiným plynem než vzduchem. Speciální trubice s dvojitým pláštěm umožňují měření teplotních závislostí.
Důležité poznámky:

- Abychom získali při práškové metodě zřetelné obrazce, musí být prášek i trubice suché. Toho lze dosáhnout mírným prohřátím trubice před měřením.
- Použijeme co nejmenší množství prášku, který rovnoměrně rozestřeme po celé délce trubice (prášek volně sypeme do mírně nakloněné trubice a současně na ni jemně poklepáváme).
- Při buzení vlnění tyčí upevníme tyč přesně uprostřed přes třmen do svěráku. Do podélného kmitání ji vybudíme podélným třením u kovových tyčí kůží nebo látkou s kalafunou, u skleněných tyčí látkou s octem. Pístové zakončení tyče (korková zátka) se nesmí dotýkat stěn trubice.
- Při měření rychlosti zvuku v trubicích dostáváme hodnoty poněkud odlišné než při měření ve volném prostoru, zejména při nižších frekvencích. Nemá-li být odchylka větší než 1%, musíme volit průměr trubice větší než 3 až 4 cm. Vztah pro optimum mezi délkou trubice, jejím průřezem a frekvencí (vlnovou délkou) je dán $l = k\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi D}{4}$, k = 1,2,….
- Zvýšení rychlosti zvuku ve vlhkém vzduchu činí asi 0,2%, a proto při běžných měřeních není třeba tento vliv uvažovat.
- Přesnost měření rychlosti zvuku v Kundtově trubici je dána přesností odečtení vlnové délky (1až 2%) a přesností určení frekvence (2 až 3 %).

Uspořádání měření pomocí Kundtovy trubice je na obr. 5.



Obr. 6: *Měření pomocí Kundtovy trubice*

<u>Měření rychlosti zvuku ve vzduchu Kundtovou trubicí s použitím tónového generátoru</u>

Pro měření použijeme oboustranně otevřenou Kundtovu trubici opatřenou tyčí s pístem. Zvukové vlnění bude realizováno pomocí tónového generátoru. Pro výpočet rychlosti zvuku použijeme vztah $v = f \,.\, \lambda$.

<u>Postup měření</u>:

A. Měření s jedním reproduktorem.
   1. K jednomu konci otevřené Kundtovy trubice s korkovou drtí přiložíme reproduktor ® s ozvučnicí a druhý konec trubice uzavřeme pístem (P). Pomocí pístu můžeme měnit délku vzduchového sloupce v trubici (viz obr. 6). Reproduktor připojíme přes zesilovač k tónovému generátoru.
   2. Pro zvolený kmitočet *f* hledáme polohy pístu tak, aby v trubici vzniklo stojaté vlnění složením zvukové vlny z reproduktoru s vlnou odraženou od pístu. Korková drť vytvoří výrazné obrazce, pozorujeme chvění drti v kmitnách. U práškových obrazců změříme postupnou metodou vzdálenosti jednotlivých kmiten.
   3. Měření opakujeme pro další kmitočty, které zvyšujeme po 100 Hz, měříme pro různé frekvence.
   4. Podle vztahu $v = f.\lambda$ vypočteme rychlost zvuku. Určíme aritmetický průměr naměřených hodnot a vypočteme střední chybu měření.

B. Měření se dvěma reproduktory.

   1. K oběma koncům otevřené Kundtovy trubice s korkovou drtí přiložíme reproduktory, které jsou přes zesilovač připojeny na společný tónový generátor.
   2. Vzhledem k tomu, že délka trubice je konstantní, hledáme jednotlivé frekvence, pro které je délka vzduchového sloupce právě násobkem $\lambda/2$.
   3. Z práškových obrazců změříme postupnou metodou vlnovou délku.
   4. Měření opakujeme alespoň pro10 různých kmitočtů a rychlost zvuku určíme ze vztahu $v = \lambda.f$.
   5. Z naměřených hodnot určíme průměrnou hodnotu rychlosti zvuku a střední chybu měření (pro 10 měření je $\overline{\sigma}v = \pm\left(\frac{1}{12}\right)\Sigma\Delta_{+}$).
   6. Porovnáme výsledky měření v části A. a B., hodnoty přepočteme na teplotu laboratoře a srovnáme s tabelovanou hodnotou.

Máme-li možnost Kundtovu trubici temperovat, měříme závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě podle uspořádání s jedním reproduktorem. Vypočteme teplotní součinitel rychlosti zvuku ve vzduchu a porovnáme jej s tabulkovou hodnotou.

Měřidlo ke Kundtově trubici

Popis zdířek:
1 – vstup generátor – možnost připojení osciloskopu
2 – vstup generátor
3 – nastavení úrovně signálu z RC generátoru
4 – milivoltmetr
5 – přepínač mezi vysílacím reproduktorem a snímačem
6 – nastavení citlivosti, možnost změny rozsahu
7 – kontrolní výstup (možnost připojení osciloskopu)
8 – přepínač mezi externím a interním reproduktorem
9 – nastavení hlasitosti
10 – zapojení snímacího mikrofonu
11 – vstupní zdířky pro napájecí zdroj 15 V

12 – zdířky pro připojení externího reproduktoru
13 – kontrolní výstup pro vysílací reproduktor
14 – výstup pro vysílací reproduktor
15 – skupina diod LED
Postup práce:
Jednotlivé části aparatury zapojíme. Na milivoltmetru nastavíme co nejmenší rozsah, nastavíme přepínač 5 do polohy vlevo (vysílací reproduktor). Zapneme napájecí zdroj 15 V a na RC generátoru nastavíme požadovanou frekvenci. Odečteme hodnotu na milivoltmetru a vypočteme výkon, dodávaný vysílacím reproduktorem do trubice.
Poté zvětšíme rozsah milivoltmetru, přepínač 5 nastavíme do polohy vpravo (snímač), píst s mikrofonem zasuneme až k reproduktoru a začneme měřit. Poslechem a pomocí měřidla hledáme polohu kmiten a uzlů pro danou frekvenci zvuku. Hodnoty odečítané na milivoltmetru zapisujeme do tabulky. Měření opakujeme pro různé frekvence.

Na předním panelu vlevo nahoře se dále nachází skupina LED diod, kterými indikujeme polohu maxima a navíc fázový posun vstupujícího signálu a signálu odraženého . Signály jsou ve fázi, pokud svítí současně levá i pravá spodní (žlutá) dioda, v ideálním případě svítí dvojice diod uprostřed nad sebou. Svítí-li jen levá žlutá dioda popř. jen pravá žlutá dioda, jsou vlny fázově posunuty . Fázový posun vlevo a vpravo lze demonstrovat pomocí osciloskopu. U nižších frekvencí (pod 1 kHz, tzn. 500 Hz, 400 Hz, 200 Hz) sice detekujeme maximum (kmitnu), ale obě vlnění nejsou ideálně ve fázi. Určení polohy maxima je v tomto případě méně přesné, neboť je indikujeme ve větším intervalu. Chyba se zvětšuje směrem k nižším frekvencím.
Proveďte odečty poloh maxim i pomocí osciloskopu, vypočítejte chybu v určení polohy kmitny v závislosti na frekvenci (fázové posunutí). Výsledky zobrazte graficky.

Harmonické a neharmonické tóny pomocí soupravy ISES

Pomocí systému lze na obrazovce modelovat časové záznamy harmonických a neharmonických zvukových signálů. Jednoduchý periodický děj s harmonickým průběhem představuje např. chvění ladičky. Zpívané samohlásky mají rovněž periodický průběh, ne však harmonický. Různé šumy, hluky, tlesknutí nejsou ani harmonické, ani periodické.

Pomůcky: modul mikrofon, souprava ladiček, hudební nástroje

Postup měření:

V programu nastavíme celkový čas měření 0,01 sekundy a maximální vzorkovací frekvenci v jednom kanále (až 6000 Hz). Oživíme kanál A, ke kterému připojíme modul mikrofon. Zobrazení ponecháme standardní, tj. časovou závislost.
Rozezvučíme ladičku a přiblížíme ji k mikrofonu. Odstartujeme měření, ladičku necháme v konstantní vzdálenosti od mikrofonu. Na obrazovce by se měl objevit pravidelný sinusový průběh. Odečteme počet period a porovnáme vypočtenou hodnotu frekvence s údajem na ladičce.
Poté k mikrofonu přibližujeme různé hudební nástroje , zpíváme do mikrofonu různé samohlásky. Sledujeme výšku tónu (v závislosti na frekvenci) nebo charakteristickém zabarvení hlasu. Zkoušíme další akustické signály – tleskání, bouchání apod.

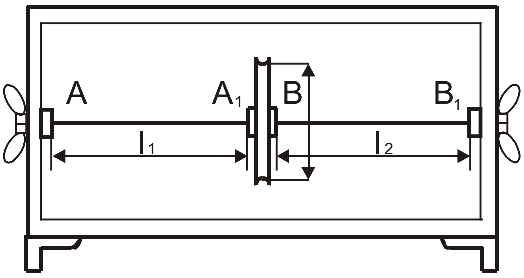
II.cyklus

Úloha č. 6: *Měření modulu pružnosti ve smyku*

a) měření modulu pružnosti ve smyku statickou metodou

Drát kruhového průřezu o poloměru r a délce l se působením momentu dvojice sil M stočí o úhel φ, pro který lze odvodit vztah $\varphi = \dfrac{2\pi l M}{G(\pi r^2)^2}$, kde G je modul pružnosti ve smyku (modul torze). Modul torze můžeme měřit přímou metodou tak, že změříme rozměry drátu a úhel, o který se drát stočí působením známého momentu dvojice sil. Působí-li síly ve směru tečny na obvodu kruhové desky o průměru D, je moment dvojice $M = D\,F$.

Měřící zařízení je zobrazeno na obr. 7. Drát je natažen vodorovně mezi body A a B_1, uprostřed je umístěna kruhová deska, na jejímž obvodu působí silová dvojice. Na každou polovinu drátu působí polovina momentu. Označíme-li délku jedné poloviny drátu l, pak pro stočení platí $\varphi = \dfrac{\pi l D F}{G(\pi r^2)^2}$ a odtud modul torze $G = \dfrac{l D F}{\varphi \pi r^4}$.



Obr. 7: *Měření modulu pružnosti ve smyku*

Postup měření:

1. Desetkrát změříme první a druhou polovinu drátu l_1 a l_2 , určíme střední nejistoty ze součtu druhých mocnin odchylek. Jako správnou hodnotu délky jedné poloviny drátu považujeme aritmetický průměr $l = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, střední nejistota měření je dána $\overline{\sigma} l = \frac{1}{2}\sqrt{(\overline{\sigma} l_1)^2 + (\overline{\sigma} l_2)^2}$.
2. Mikrometrem změříme průměr drátu d_1, stanovíme také nulovou polohu mikrometru d_o. Měření opakujeme desetkrát. Skutečný průměr $d = d_1 - d_o$, střední nejistota $\overline{\sigma} d = \sqrt{(\overline{\sigma} d_1)^2 + (\overline{\sigma} d_o)^2}$. Poloměr drátu je potom $r = \frac{d}{2}$, střední nejistota $\overline{\sigma} r = \frac{1}{2}\overline{\sigma} d$.
3. Posuvným měřítkem změříme desetkrát průměr kotouče, na jehož obvodu působí silová dvojice. Od této hodnoty odečítáme hloubku drážky pro vlákno, kterou určíme pomocí hloubkoměru. Měříme také desetkrát. Je-li průměr kotouče D_1, hloubka drážky h, pak skutečný průměr kotouče je $D = D_1 - 2h$. Střední nejistota $\overline{\sigma}(2h) = 2\overline{\sigma} h$, $\overline{\sigma} D = \sqrt{(\overline{\sigma} D_1)^2 + [\overline{\sigma}(2h)]^2}$.

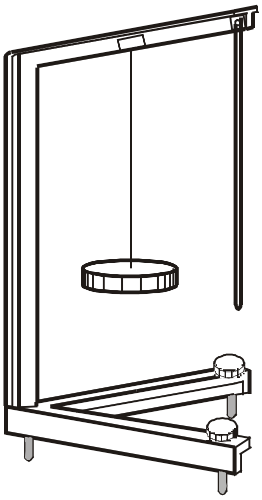
4. Postupně klademe závaží na závěsy vedené drážkou v kotouči přes kladky. Oba závěsy zatěžujeme stejně a měříme úhel φ stočení drátu. Stočení φ měříme při rostoucím i klesajícím zatížení. Použijeme postupnou metodu – provedeme 2n měření , která rozdělíme na polovinu, výsledky zapisujeme do tabulky.
5. Pro odpovídající si hodnoty zatížení vypočteme vždy průměrné stočení, ze kterého určíme střední hodnotu a ze součtu čtverců odchylek střední nejistotu.
6. Určíme hmotnost závaží – všechna závaží zvážíme najednou a vydělíme jejich počtem.
7. Vypočteme modul torze, dosazujeme stočení φ způsobené závažím n m, za sílu F dosadíme F = n m g, kde g = 9,81 m.s^{-2}. Všechny veličiny dosazujeme v základních jednotkách SI.
8. Určíme střední nejistotu $\overline{\sigma}G = G\sqrt{\left(\frac{\overline{\sigma}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\sigma}D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\overline{\sigma}\varphi}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{4\overline{\sigma}r}{r}\right)^2}$. Je vidět, že střední nejistota poloměru se ve výpočtu nejistoty uplatní čtyřikrát, proto musí být poloměr změřen velmi přesně.
9. Výsledky měření porovnáme s tabulkovými hodnotami.

b) měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Dynamická metoda je založena na studiu torzních kmitů tělesa zavěšeného na drátě, jehož modul torze určujeme. Je-li na drátě délky l a poloměru r zavěšeno těleso o momentu setrvačnosti J, platí pro torzní kmity rovnice ve tvaru $J\varepsilon = -\frac{G}{2\pi}\frac{\left(\pi r^2\right)^2}{l}\varphi$, kde G je modul pružnosti ve smyku, φ je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy, ε je úhlové zrychlení při výchylce φ. Tuto rovnici porovnáme s rovnicí popisující kmitavý harmonický pohyb a dostaneme $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G}{2\pi}\frac{\left(\pi r^2\right)^2}{lJ}$. Odtud lze vyjádřit modul pružnosti ve smyku ve tvaru $G = \frac{8\pi lJ}{r^4 T^2}$. Jsou-li kmity pomalé, můžeme místo doby kmitu měřit dobu kyvu T', která je poloviční. Potom $G = \frac{2\pi lJ}{r^4 T'^2}$.

Postup měření:

1. Použijeme zařízení podle obr. 8. Na drátě, jehož modul pružnosti ve smyku měříme, je zavěšeno těleso ve tvaru válce, jeho moment setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2$, kde m je hmotnost válce a R jeho poloměr. Hmotnost válce však nelze určit vážením (je připevněn k drátu), postupujeme metodou popsanou v předchozí kapitole.
2. Měřítkem děleným na milimetry změříme délku drátu.
3. Změříme průměr drátu mikrometrem (nezapomeneme stanovit nulovou polohu mikrometru). Všechna měření opakujeme desetkrát, nejistoty měření určíme pomocí součtu kladných odchylek.



Obr. 8: *Měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou*

4. Vypočítáme modul torze, za moment setrvačnosti dosadíme hodnotu určenou metodou torzních kmitů.
5. Vypočítáme střední nejistotu výsledku podle vztahu
$$\bar{\sigma}G = G\sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}J}{J}\right)^2 + \left(\frac{4\bar{\sigma}r}{r}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{\sigma}T}{T}\right)^2}\ .$$

Modul pružnosti ve smyku lze vypočítat rovněž pomocí dob kmitu (nebo kyvu) T, T_1 samotného válce a válce s přídavným tělesem a momentu setrvačnosti J_1 přídavného prstence, aniž bychom počítali moment setrvačnosti *J*. Dosazením za *J* do vztahu pro *G* získáme vztah $G = \dfrac{8\pi l J_1}{r^4 (T_1 + T)(T_1 - T)}$ měříme-li doby kmitu T_1, T, nebo výraz $G = \dfrac{2\pi l J_1}{r^4 (T_1' + T')(T_1' - T')}$, měříme-li doby kyvu T_1', T'. Střední nejistotu výsledku potom počítáme ze vztahu
$$\bar{\sigma}G = G\sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}J_1}{J_1}\right)^2 + \left(\frac{4\bar{\sigma}r}{r}\right)^2 + \left[\frac{\bar{\sigma}(T_1 + T)}{T_1 + T}\right]^2 + \left[\frac{\bar{\sigma}(T_1 - T)}{T_1 - T}\right]^2}\ .$$
Nejistotu součtu a rozdílu dob je $\bar{\sigma}(T + T_1) = \bar{\sigma}(T_1 - T) = \sqrt{(\bar{\sigma}T_1)^2 + (\bar{\sigma}T)^2}$. Nepotřebujeme-li znát moment setrvačnosti *J* zavěšeného válce, je tento způsob výpočtu modulu pružnosti ve smyku *G* kratší a přitom stejně přesný. Výsledky měření porovnáme s tabulkovými hodnotami.

Úloha č. 7: ***Mechanická hystereze***

Jsou-li kovové tyče zkrouceny, lze určit vztah mezi kroutícím momentem a úhlem otočení a současně zaznamenat hysterezní křivku. U pevných látek existuje oblast, kdy závislost mezi napětím a deformací není již lineární , ale deformace je i nadále do určité míry reverzibilní. Limitem této oblasti je poddajnost (ohebnost), mez pružnosti. Deformace se stává plastickou, je-li napětí větší než uvedená mez. Deformace tyče není potom úplně reverzibilní, pouze nachází-li se tyč ve stavu bez působících sil. Vzhledem k tomu, že ohebnost (plasticita) souvisí s přesunem atomů, uplatní se vliv teploty a časový faktor. V souladu s Hookovým zákonem je vztah mezi napětím a deformací dán vztahem $\tau = \sigma . \gamma$, kde σ je modul torze.

V oblasti plastické deformace je splněn relaxační teorém ve tvaru $\frac{d\tau}{dt} = \sigma\frac{d\gamma}{dt} - \frac{\tau}{\lambda}$, kde λ je relaxační doba. V případě, že deformace je konstantní, je napětí τ po uplynutí času t rovno $\tau = \tau_0 e^{-t/\lambda}$, kde τ_0 je počáteční napětí.
Je-li kov zatížen v oblasti plastické deformace a je mu dána určitá doba na relaxaci, vrátí se opět do oblasti, kde platí Hookův zákon, avšak s novou rovnovážnou polohou. Je třeba si uvědomit, že u tyčí je deformace vnějších vrstev větší než vrstev vnitřních. Vnější vrstvy se mohou od určitého úhlu torze nacházet v oblasti plastické deformace, zatímco vnitřní vrstvy jsou ještě v oblasti deformace pružné.

Postup práce:

Tyč z daného materiálu změříme (určíme její délku a průměr) a upevníme do připraveného stojanu. Pružinová váha působí jako pravoúhlá páka. Zaznamenáváme sílu a úhel torze. Kromě oceli je mez pružnosti dosažena velmi rychle, proto je třeba měření provádět plynule nebo se zařazením relaxačních intervalů. Hledáme vztah mezi deformací a momentem síly jako funkcí času nebo teploty.

1. Změřte a zakreslete hysterezní křivku ocelové a měděné tyče.
2. Proměřte křivku závislosti napětí a relaxace pro různé relaxační doby.

b) určení modulu pružnosti různých materiálů z torze tyčí (PHYWE)

Aparaturu sloužící k určení mechanické hystereze tyčí z různých materiálů lze použít i pro měření torzních kmitů a modulu torze. U statické metody určení modulu torze dbáme na to, aby síla působila v r= 0,15 cm. Všechna ramena (závěs, nosník, podložka) musí svírat pravé úhly. Doporučujeme použití ocelové tyče o délce 0,5 m a průměru 0,002 m, neboť má širokou oblast pružné deformace. Tato tyč je vhodná i při použití dvou závaží umístěných symetricky na kotouči při určování modulu torze.

Teorie:
Je-li těleso považováno za stejnorodé a $\vec{r}_0$ a $\vec{r}$ označují polohový vektor bodu p v nedeformovaném a deformovaném stavu tělesa, potom pro malé vektory posunutí lze psát $\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}_0 \equiv (u_1, u_2, u_3)$ a tenzor deformace $\hat{d}$ je roven $d_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$.

Síly $d\vec{F}$, které působí na objemový element tělesa, jehož hrany jsou kolmé k souřadné rovině, jsou popsány tensorem napětí $\hat{\tau}$. Pro každý element plochy dA, charakterizovaný jednotkovým vektorem $\vec{e}$ ve směru normály, je dán vektor napětí $\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dA}, \vec{p} = \vec{e}.\vec{\tau}$.

Hookův zákon popisuje vztah mezi $\hat{d}$ a $\vec{\tau} : \tau_{ik} = \sum_{l,m} c_{ik}^{lm} d_{lm}$. Tenzor $\hat{c}$ je pro pružné těleso symetrický, takže má jen 21 složek (na místo 81). Pro izotropní pružné těleso se tento počet redukuje na 2 složky, a to na modul pružnosti E a modul torze G (nebo–li Poissonův poměr μ). Potom lze psát

$$\tau_{11} = \frac{E}{1+\mu}, \left\{d_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(d_{11} + d_{22} + d_{33}\right)\right\}, \tau_{12} = Gd_{12} = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}d_{12}.$$

Analogické vztahy lze psát pro τ_{22}, τ_{33}, τ_{13}, τ_{23}. Po sloučení všech vztahů můžeme nakonec psát $dF_x = G\omega dS = G\frac{r\Phi}{L}rdrd\alpha$. Celkový moment v případě kruhového průřezu $dT_z = \int_0^{2\pi} dF_x.r = \frac{2\pi Gr^3\Phi dr}{L}$ a odtud $T_z = \int_0^R dT_z = \frac{\pi}{2}G\Phi\frac{R^4}{L}$. Na základě definice torzního modulu $T_z = D_T\Phi$ máme $D_T = \frac{\pi}{2}\frac{R^4}{L}G$.

Newtonova rovnice pro rotační pohyb je vyjádřena vztahem $\vec{T} = \frac{d}{dt}\vec{L}$, kde moment hybnosti $\vec{L}$ je úměrný úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a tenzor momentu setrvačnosti $\hat{I}$ splňuje vztah $\vec{L} = \hat{I}.\vec{\omega}$. Na základě předchozích vztahů potom máme $\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{D_T}{I_z}\Phi = 0$. Perioda těchto kmitů je $T = 2\pi\sqrt{I_z / D_T}$, neboli $T = 2\pi\sqrt{I_z\frac{2}{\pi}\frac{L}{G}R^{-2}}$. D_T je určeno statickou metodou.

Postup práce:

1. Statickou metodou určete torzní modul tyče.
2. Pomocí metody kmitů určete moment setrvačnosti tyče.
3. Určete závislost periody kmitů na délce a tloušťce tyče.
4. Určete moduly torze pro tyče z různých materiálů.

Úloha č. 8: ***Měření pomocí matematického kyvadla***

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod m upevněný na nehmotném závěsu. Přibližně lze matematické kyvadlo realizovat pomocí malé kuličky upevněné na tenké, dokonale pevné niti (rybářské vlákno) uchycené v pevném bodě.
Je-li kyvadlo vychýleno o úhel Φ z rovnovážné polohy, rozloží se tíha na dvě složky – normálovou složku $F_n = m\, g \cos\Phi$ mající směr závěsu a napíná jej. Nemá pohybový účinek. Druhá složka je $F_t = -m\, g \sin\Phi$ (směřuje k rovnovážné poloze A). Síla F_t je kvazielastická a pro malé výchylky je pohyb kuličky harmonický. Lze jej proto popsat pohybovou rovnicí ve tvaru $m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\Phi$, kde $s = l.\Phi$, $\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\Phi}{dt^2}$. Dále tedy máme $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\Phi$.

Pro malé výchylky je $\sin\Phi \approx \Phi$ a rovnice přejde na tvar $\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\Phi = -\omega^2\Phi; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Odtud $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Úkoly:

1. Pro malé výchylky Φ určete dobu kmitu kyvadla v závislosti na jeho délce a vyneste graf této závislosti. Na základě tohoto měření určete délku sekundového kyvadla.

1. Určete graf závislosti doby kmitu T kyvadla na výchylce Φ , tj. $T\left(\sin^2\frac{\Phi}{2}\right)$.

2. Určete hodnotu tíhového zrychlení g z doby kyvu $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Postup měření:

Délku l kyvadla nelze přímo stanovit, proto nejdříve určíme dobu kyvu T_1 pro délku závěsu l . Potom kyvadlo zkrátíme o délku d, kterou lze stanovit velmi přesně. Doba kyvu T_2 kyvadla o délce l – d je dána $T_2 = \pi\sqrt{\frac{l-d}{g}}$. Úpravou obou rovnic (umocnění, odečtení) dostaneme pro vyjádření g výraz $g = \frac{\pi^2 d}{T_1^2 - T_2^2} = \frac{\pi^2 d}{(T_1 - T_2)(T_1 + T_2)}$.

1. Tenké dlouhé vlákno vedeme přes závěs upevněný na stěně, délka vlákna je volitelná. Polohu kuličky odečítáme pomocí vodorovného ukazatele na měřítku.
2. Kuličku zajistíme v dané poloze a odečteme desetkrát její polohu d_1 vzhledem k pevnému měřítku. Vypočteme střední nejistotu výsledku.
3. Kyvadlo rozkýváme tak, aby výchylka nebyla větší než 5^o a postupnou metodou měříme dobu kyvu (měříme po 10 kyvech, celkem 200 kyvů). Výsledky zapíšeme do tabulky.Určíme dobu kyvu T_1.
4. Kyvadlo zkrátíme (o 60 až 80 cm) a desetkrát odečteme polohu d_2. Vypočteme střední nejistotu měření.
5. Změříme dobu kyvu kyvadla T_2 pro délku d_2.
6. Délka $d = d_1$-d_2, střední chyba $\overline{\sigma}d = \sqrt{(\overline{\sigma}d_1)^2 + (\overline{\sigma}d_2)^2}$. Střední nejistoty v určení součtu a rozdílu dob kyvu jsou si rovny $\overline{\sigma}(T_1 + T_2) = \overline{\sigma}(T_1 - T_2) = \sqrt{(\overline{\sigma}T_1)^2 + (\overline{\sigma}T_2)^2}$ a střední nejistota v určení gravitačního zrychlení je dána $\overline{\sigma}g = g\sqrt{\left(\frac{\overline{\sigma}d}{d}\right)^2 + \left[\frac{\overline{\sigma}(T_1+T_2)}{T_1+T_2}\right]^2 + \left[\frac{\overline{\sigma}(T_1-T_2)}{T_1-T_2}\right]^2}$. Dbejte na co nejpřesnější určení dob kyvu T_1 ,T_2, které se od sebe jen málo liší. Vzhledem k tomu, že při výpočtu střední nejistota měření závisí na relativní nejistotě rozdílu, pro málo přesná měření , má nejistota velkou hodnotu.
7. Vypočítejte systematickou chybu měření související s tím, že kyvadlo není ideálně matematické a amplituda kmitů je konečná.

   Postup: Obecně platí pro dobu kmitu T vztah $(*)$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Phi}{2}\right)$. V případě matematického kyvadla uvažujeme, že se jedná o hmotný bod a vlákno má zanedbatelnou hmotnost, upravujeme $T \cong 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Phi}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\Phi}{2}\right)$; pro $\Phi \leq 2^o$ dostáváme použitý vztah $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Vezmeme-li v úvahu, že r< 1 cm, vlákno má délku l = 1 m, úhel ϕ je maximálně $1{,}5^o$, potom lze g určit na základě vztahu $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Avšak při

opravě je nutno určit moment setrvačnosti J a dosadit do vztahu $(*)$. Moment setrvačnosti $J = J_T + md^2$, J_T koule je $J_{Tk} = \frac{2}{5}mr^2$ a moment setrvačnosti J_T tyče je $J_{Tt} = \frac{1}{12}ml^2$.
Opravenou hodnotu porovnejte s výsledky předchozích měření.

Využití měřící soustavy ISES

Pomůcky: modul optická závora, matematické kyvadlo

Provedení:
V programu nastavíme celkový čas měření asi 5 s a vzorkovací frekvenci 200 Hz. Oživíme kanál A, ke kterému připojíme přes konektor optickou závoru. Ponecháme standardní zobrazení, tedy časovou závislost. Nastavíme ruční start s akustickým signálem.
Závoru upevníme na stojan a nastavíme tak, aby vysílač byl na jedné ose s přijímačem ve vzdálenosti asi 5 cm . V rovnovážné poloze musí kyvadlo (kulička) protínat osu přijímač-vysílač.

a) Kyvadlo vychýlíme , necháme volně kývat a odstartujeme měření. Odečteme dobu kyvu .
b) Kyvadlo vychýlíme pod velkým úhlem (30° a více) a měření zopakujeme či provedeme do téhož obrázku použitím příkazu „přidej“ (horní menu). Opět odečteme dobu kyvu.
c) Stejná měření provádíme při jiné délce závěsu. Sledujeme závislost doby kyvu na délce závěsu.

Tlumené kmity – souprava ISES

Závaží zavěšené na pružině koná tlumené kmity, což lze demonstrovat na průběhu okamžité výchylky a amplitudy v tlumeném lineárním oscilátoru.
Ke sledování použijeme soupravu ISES, modul snímač polohy a pružinu se závažím na niti.
Na závaží působí kromě tíhové síly (kompenzované pevností závěsu) ještě elastická síla ($F = -ky$) a síly, které pohyb tlumí – tření v kladce, odpor vzduchu aj. Výsledný pohyb lze v určitém přiblížení popsat rovnicí, která má řešení ve tvaru $y = A\, exp(-\lambda t) sin\, \omega t$, kde y je okamžitá výchylka, A počáteční amplituda, λ koeficient útlumu, ω kruhová frekvence tlumených kmitů oscilátoru.

<u>Postup práce:</u>

V programu nastavíme celkový čas měření 10 až 15 sekund a vzorkovací frekvenci 100 Hz. Oživíme pouze kanál A, ke kterému připojíme modul snímač polohy. Ponecháme standardní zobrazení – časovou závislost.
Na pružinu zavěsíme závaží na dlouhém drátu či niti, který vedeme přes kladku snímače polohy (potenciometru). Ten nastavíme tak, aby výchylka v rovnovážné poloze byla přibližně v polovině obrazovky. Poté zatáhneme za závaží a sledujeme průběh okamžité výchylky a exponenciální pokles amplitudy v tlumeném harmonickém oscilátoru. Zderivujeme-li naměřenou závislost, dostaneme průběh rychlosti. Ukážeme, že v daném přiblížení je rychlost maximální v okamžicích, kdy je výchylka nulová – závaží prochází rovnovážnou polohou a naopak.

Úloha č. 9: ***Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadle. Závislost doby kmitu fyzického kyvadla na g – Machovo kyvadlo***

Tíhové zrychlení

Tíhová síla je síla, které hmotný bod (těleso) podléhá v zemském tíhovém poli. Je složena ze dvou sil : gravitační síly F_g, která v daném bodě zemského povrchu míří do středu Země, a odstředivé síly F_{od}, která je kolmá na osu rotace Země. Jejich složením získáme výslednou sílu, která je závislá jak na vzdálenosti od středu Země, tak i na zeměpisné šířce.

Při určení gravitační síly vycházíme z Newtonova gravitačního zákona ve tvaru :

$$\overline{F}_g = \kappa \frac{mM_z}{r^2} \cdot \frac{\overline{r}}{r}$$

kde m je hmotnost studovaného hmotného bodu, resp. tělesa, M_Z je hmotnost Země, r je vzdálenost tělesa o hmotnosti m od středu Země a κ je gravitační konstanta, která je nezávislá na prostředí ve kterém se hmotnosti přitahují.

Velikost gravitačního zrychlení pak je:

$$g = \kappa \frac{M_z}{(R_z + h)^2}$$

kde R_Z je poloměr Země a h je výška nad povrchem. Samozřejmě, že R_Z není konstantní a zrychlení g pro $h=0$ roste od rovníku k pólům.

Vztah pro gravitační zrychlení g lze pro $h << Rz$ upravit na tvar :

$$g = \kappa \frac{M_z}{(R_z)^2}\left(1 - \frac{2h}{R_z}\right)$$

Odstředivá síla působící na těleso vlivem zemské rotace závisí na vzdálenosti tělesa od osy rotace

$$\vec{F}_{od} = m.\vec{a}_{od} = m.\vec{r}.\omega_z^2$$

pro velikost odstředivého zrychlení pak platí vztah :

$$\vec{a}_{rod} = R_z.\cos\alpha.\omega_z^2$$

kde α odpovídá zeměpisné šířce studovaného bodu.

Tíhové zrychlení je v daném bodě pro všechna tělesa stejné. K jeho měření lze využít reverzní kyvadlo - to je zvláštní typ fyzického kyvadla. Fyzické kyvadlo je těleso, které se v tíhovém poli kýve kolem vodorovné osy neprocházející jeho těžištěm.

Na kyvadlo působí moment tíhové síly :

$$M = -m.g.a.\sin\varphi$$

kde m je hmotnost kyvadla, a je vzdálenost těžiště od osy otáčení a φ je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy. Znaménko minus značí, že tento moment působí proti výchylce, tj. snaží se kyvadlo vrátit zpět do rovnovážné polohy.

Pro těleso otáčející se kolem pevné osy platí :

$$J.\varepsilon = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M\,,$$

kde ε je úhlové zrychlení kyvadla a J je moment setrvačnosti kyvadla kolem zvolené osy. Dosadíme-li do předchozí rovnice moment setrvačnosti M, získáme pro naše kyvadlo pohybovou rovnici :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m.g.a.}{J}\sin\varphi = 0,$$

Pro malé výchylky z rovnovážné polohy můžeme položit sin $\varphi = \varphi$ (pro φ= 5° se dopouštíme chyby asi 0,05%), čímž získáme rovnici :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0$$

kde $\omega^2 = \frac{m.g.a}{J}$ je kvadrát kruhové frekvence kyvadla.

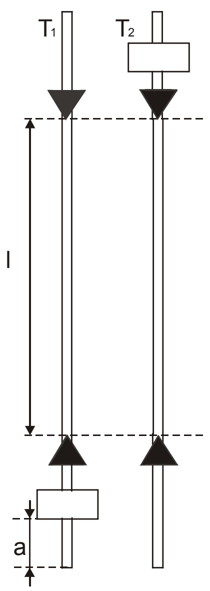
Doba kyvu (polovina doby kmitu) kyvadla je rovna :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega},\ \omega = \sqrt{\frac{M}{J}} = \sqrt{\frac{mga}{J}}\ ,$$

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Zde lze zavést pojem redukovaná délka fyzického kyvadla - to je délka matematického kyvadla, které má shodnou dobu kyvu s daným fyzickým kyvadlem. Z toho pak plyne předchozí vztah :

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{J}{mga}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Obr. 9: *Reverzní kyvadlo*

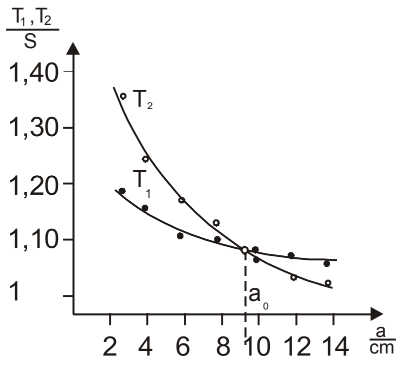
Reverzní kyvadlo (obr. 9) je fyzické kyvadlo, které je opatřeno dvěma rovnoběžnými osami s břity proti sobě. Na jednom konci je závaží, které lze posouvat podél tyče. Pro dobu kyvu

platí vztah $T = \pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}}$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose jdoucí závěsem kolmo k rovině kyvů, m hmotnost kyvadla, d vzdálenost osy od těžiště, g tíhové zrychlení.
Délka l matematického kyvadla, které má stejnou dobu kyvu jako dané fyzické kyvadlo, je tzv. redukovaná délka fyzického kyvadla. Vyneseme-li na spojnici osy a těžiště tuto redukovanou délku, dostaneme bod, tzv. střed kyvu. Vedeme-li tímto bodem osu rovnoběžnou s původní osou, pak doba kyvu kyvadla kolem této osy je stejná jako kolem osy původní. Najdeme-li tedy na fyzickém kyvadle dvě takové osy (různě vzdálené od těžiště), pro které je doba kyvu stejná, rovná se jejich vzdálenost l redukované délce fyzického kyvadla. Pro dobu kyvu potom platí vztah $T = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Protože vzdálenost os na reverzním kyvadle je stálá, hledáme takovou polohu posuvného závaží (válce), pro kterou je doba kyvu kolem obou os stejná. Vzdálenost břitů je pak rovna redukované délce.

a) měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Tíhové zrychlení budeme určovat ze vztahu $g = \dfrac{\pi^2 l}{T^2}$ a bude tedy potřeba najít správnou polohu závaží, a tím vzdálenost a_o, pro kterou budou doby kyvu kolem obou os stejné. Hledat polohu a_o zkusmo je zdlouhavé a málo přesné, volíme proto následující postup:

1. Závaží upevníme v určité vzdálenosti a od konce tyče a změříme dobu kyvu T_1 kolem osy vzdálenější; potom kyvadlo obrátíme a změříme dobu kyvu T_2 kolem osy bližší k závaží (rozkyv nesmí být větší než 5^o). Je-li doba kyvu kolem osy bližší větší než kolem osy vzdálenější, posuneme závaží asi o 2 cm blíže ke středu. Tím se obě doby kyvu zkrátí, více však pro osu bližší. Postup opakujeme tak dlouho, až v určité poloze závaží je doba kyvu kolem osy bližší menší než kolem osy vzdálenější. Závaží posuneme ještě dvakrát směrem ke středu. Z naměřených dob kyvu sestavíme tabulku a sestrojíme graf , kde na osu x nanášíme vzdálenost a (cm) a na svislou osu doby kyvu . Body T_1 proložíme jednu křivku (tj.doby kyvu pro vzdálenější osu a různé polohy závaží) a druhou křivku proložíme body T_2. Z průsečíku obou křivek určíme vzdálenost a_o.



Obr. 10: *Určení vzdálenosti a_0*

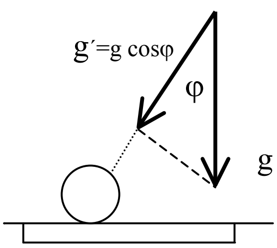
Doby kyvu měříme pomocí digitálního čítače kmitů – nastavíme dobu měření 4 T a měření opakujeme dvacetkrát. Vypočítáme průměrnou hodnotu doby trvání 4 kyvů, odtud dobu trvání jednoho kyvu. Chyby měření počítáme ze součtu čtverců odchylek od aritmetického průměru. Při přesném měření by se doby kyvu T_1 a T_2 neměly lišit více než v mezích pozorovacích chyb. Jako správnou hodnotu doby kyvu bereme $T = \frac{1}{2}\left(T_1 + T_2\right)$, střední nejistota $\overline{\sigma}T = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\overline{\sigma}T_1\right)^2 + \left(\overline{\sigma}T_2\right)^2}$.

2. Změříme vzdálenost břitů měřítkem děleným na milimetry. Měříme v různých polohách měřené délky vzhledem k měřítku, přičemž odečítáme polohy obou břitů. Měření zapíšeme do tabulky. Hledaná vzdálenost $l=l_2-l_1$. Odečítání opakujeme desetkrát. Střední nejistotu měřené délky vypočítáme pomocí součtu čtverců odchylek od aritmetického průměru.
3. Vypočítáme tíhové zrychlení a střední chybu výsledku $\overline{\sigma}g = g\sqrt{\left(\frac{\overline{\sigma}l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\overline{\sigma}T}{T}\right)^2}$.

.

b) závislost doby kmitu fyzického kyvadla na tíhovém zrychlení

Doba kmitu fyzického kyvadla s vodorovnou osou je dána vztahem $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$. Ze vztahu je zřejmé, že doba kmitu je nepřímo úměrná odmocnině z tíhového zrychlení. Tíhové zrychlení je pro dané místo konstantní (nemůžeme je během měření měnit), můžeme však měnit rovinu kyvu. Odkloníme-li rovinu kyvu o úhel φ od svislého směru, uplatní se jen složka g´ tíhového zrychlení, která leží v rovině kyvu.



Podle obrázku $g' = g\cos\varphi$. Doba kmitu skloněného kyvadla je $T' = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg'd}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd\cos\varphi}}$. Podíl dob kmitu svislého a skloněného kyvadla je $\frac{T}{T'} = \sqrt{\cos\varphi}$.

Naším úkolem bude experimentální ověření tohoto vztahu pomocí Machova kyvadla.

<u>Postup měření</u>**:**

Machovo kyvadlo ustavíme pomocí libely a úhloměrné stupnice do svislé polohy. Pomocí protizávaží nastavíme vhodnou dobu kmitu. Dobu kmitu T změříme postupnou metodou. Měření zapisujeme do tabulky.

Měření doby kmitu

Doby průchodu rovnovážnou polohou — Doba 50 kmitů

n	t_1 (s)	t_2 (s)	$50\,T = t_2 - t_1$ (s)	Δ (s)	Δ^2 (s^2)
1	$10\,T$	$60\,T$			
2	$20\,T$	$70\,T$			
.					
.					
.					
5	$50\,T$	$100\,T$	$50\,T =$		
				$\Sigma\Delta = 0$	$\Sigma\Delta^2 =$

Vypočteme chybu měření a zapíšeme výsledek $50\,T = (\ \dots \pm \dots\ )$ s, po vydělení 50ti máme dobu jednoho kmitu a příslušnou střední chybu $T = (\dots \pm \dots)$ s. Dobu kmitu T pro kyvadlo ve svislé poloze měřte s co největší přesností!

Nyní skloníme kyvadlo o 10^0 od svislé roviny a měříme postupnou metodou dobu kmitu T'. Sklon zvětšujeme po 10^0 až do 70^0 . Při větších sklonech kyvadla se bude kmitání více tlumit, budeme místo postupné metody měřit pětkrát 20 nebo 10 kmitů. Vypočteme doby kmitu T'a jejich střední nejistoty. Pro jednotlivé sklony kyvadla vypočteme poměr $\frac{T}{T'}$. Střední nejistota poměru je $\bar{\sigma}\left(\frac{T}{T'}\right) = \frac{T}{T'}\sqrt{\left(\frac{\sigma T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma T'}{T'}\right)^2}$. Vypočtené poměry dob kmitu porovnáme s hodnotami $\sqrt{\cos\varphi}$. Sestavíme tabulku:

Sklon kyvadla φ (^{0})	Doba kmitu $T' \pm \sigma T'$	Poměr dob kmitu $\frac{T}{T'} \pm \sigma\left(\frac{T}{T'}\right)$	$\sqrt{\cos\varphi}$

Hodnoty v posledních dvou sloupcích by měly být stejné, odchylky by měly být v mezích pozorovacích nejistot. Pro názornost provedeme ještě grafické srovnání. Na vodorovnou osu vyneseme sklon kyvadla ve stupních, na svislou osu příslušné hodnoty $\sqrt{\cos\varphi}$ a proložíme křivku. Nyní do grafu vyneseme hodnoty $\frac{T}{T'}$, získané měřením. Těmito hodnotami již křivku neprokládáme.

Úloha č. 10: *Ověření vztahu pro dobu kmitu tělesa zavěšeného na pružině.*

Doba kmitu tělesa o hmotnosti m zavěšeného na pružině o tuhosti k je $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Tento vztah platí přesně jen za předpokladu, že hmotnost pružiny m_p je zanedbatelně malá vzhledem k hmotnosti tělesa. Při přesnějším měření je třeba ke hmotnosti tělesa připočíst jednu třetinu

hmotnosti pružiny. Vztah pro dobu kmitu je pak $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+1/3m_p}{k}}$. Pro výpočet doby kmitu potřebujeme znát také tuhost k pružiny. Tuhost pružiny určíme na základě vztahu mezi prodloužením pružiny a silou, která toto prodloužení způsobila. Zavěsíme-li na pružinu těleso o hmotnosti m, pružina se vlivem tíhy m g tělesa prodlouží o délku y, přičemž platí $m\,g = k\,y$.
Odtud tuhost pružiny $k = \frac{mg}{y}$.

<u>Postup měření</u>**:**

Nejprve určíme tuhost pružiny. Pružinu upevníme na stojan, postupně přidáváme závaží a na svislém měřítku odečítáme polohu *y*. Hmotnost závaží určíme vážením na technických vahách.
Měření prodloužení *y* provádíme postupnou metodou a zapisujeme do tabulky:

n	zatížení		poloha		prodloužení	Δ (cm)	Δ^2 (cm^2)
	m_1 (kg)	m_2(kg)	y_1(cm)	y_2 (cm)	$y = y_2 - y_1$		

.
.
Hodnoty prodloužení *y* odpovídají zvětšení hmotnosti o m_2 - m_1 . Vypočteme aritmetický průměr hodnot prodloužení *y* a z druhých mocnin odchylek střední nejistotu. Tuhost pružiny vypočteme podle vztahu $k = (m_2 - m_1)\, g / y$. Předpokládáme-li, že hmotnosti jsou určeny se zanedbatelně malou nejistotou, je střední nejistota $\sigma k = k\ \sigma y/y$. Sestrojíme graf závislosti polohy na hmotnosti závaží. Příslušnými body proložíme přímku (závislost je lineární). Dosazením *k* do vztahu pro výpočet *T* určíme dobu kmitu a střední nejistotu $\sigma T = T/2\ (\sigma k/k)$.
Dbejte na to, aby deformace byly pružné. Počáteční délka pružiny se nesmí zvětšovat.
Dále určíme skutečnou dobu kmitu *T′*. Na pružinu zavěsíme vhodné závaží a změříme postupnou metodou dobu kmitu *T′*. Měříme doby průchodu rovnovážnou polohou po 10 kmitech, celkem 100 kmitů (tabulka má 5 řádků). Vypočteme střední nejistotu doby kmitu *T′*.
Doby kmitu *T* a *T′*(vypočtená a změřená) by měly být, až na nejistoty pozorování, stejné.
Měření proveďte alespoň pro dvě různé hmotnosti zavěšeného závaží, případně také pro dvě různé pružiny.
Pozn. Při větším tlumení kmitů změříme dobu kmitu opakovaným měření doby 20 kmitů.

Měření na spřaženém pružinovém a torzním kyvadle

Na dva oscilátory o vlastní kruhové frekvenci ω_0 necháme působit sílu úměrnou rozdílu souřadnic obou oscilátorů $F_1 = k_1 (y_2 - y_1)$. Pohybové rovnice takto vázaných oscilátorů jsou

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\,k\,y_1 + k_1\,(y_2 - y_1)\,,\quad m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\,k\,y_2 - k_1\,(y_2 - y_1).$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme rovnici $m\,\frac{d^2(y_1+y_2)}{dt^2} = -\,k\,(y_1 + y_2)$.

Tato rovnice je rovnicí harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Odečtením obou rovnic dostáváme $m\,\frac{d^2(y_1-y_2)}{dt^2} = -\,k(y_1 - y_2) - 2\,k_1\,(y_1 - y_2)$. Tato rovnice je rovnicí

harmonických kmitů s úhlovou frekvencí $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k+2k_1}{m}}$. Úhlové frekvence ω_0 a ω_1 jsou **základní úhlové frekvence vázaných oscilátorů.**
Průběh kmitání oscilátorů závisí na počátečních podmínkách. Budeme uvažovat tři případy počátečních podmínek:

a) Pro počáteční výchylky $y_1 = y_2 = y_m$ má rovnice pro kmity oscilátorů tvar $y_1 = y_2 = y_m \cos\omega_0 t$, oscilátory kmitají s vlastní úhlovou frekvencí ω_0.

b) Pro počáteční výchylky $y_1 = y_m$, $y_2 = - y_m$ získáme pro kmity oscilátorů rovnice $y_1 = y_m \cos\omega_1 t$, $y_2 = - y_m \cos \omega_1 t$, oscilátory tedy kmitají s druhou základní úhlovou frekvencí ω_1.

c) Pro počáteční výchylky $y_1 = 0$, $y_2 = y_m$ jsou rovnice pro kmity oscilátorů

$$y_1 = y_m \sin \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t,\quad y_2 = y_m \cos \frac{\omega_1 - \omega_0}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_0}{2} t.$$

Je-li vazba slabá, jsou obě základní frekvence blízké. Oscilátory kmitají s úhlovou frekvencí $\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0)$ a maximální amplitudy kmitů se periodicky mění s frekvencí $\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0)$.

Pro vyjádření vazby mezi spřaženými oscilátory zavádíme stupeň vazby $\kappa = \dfrac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_1^2 + \omega_0^2}$.

Kyvadlo je tvořeno pružinou, na níž je zavěšeno závaží s činkovitým vahadélkem. Při určité poloze závažíček na příčce je doba podélných a torzních kmitů stejná.

Postup měření:

Závaží vychýlíme dolů a současně stočíme v kladném smyslu. Úhel stočení volíme tak, aby se při kmitání neměnila amplituda kmitů. Určíme měřením dobu T_0. Závaží vychýlíme dolů a současně stočíme v záporném smyslu. Změříme dobu T_1 . Vypočteme stupeň vazby. Vypočteme úhlovou frekvenci ω_2, změříme dobu kmitu T_2 a vypočteme frekvenci ω_2'. Kyvadlo vychýlíme svislým směrem bez stáčení. Energie se přenáší z podélných na torzní kmity. Vypočteme frekvenci ω_3 . Změříme dobu T_3, vypočteme frekvenci ω_3'. Měříme dobu mezi dvěma minimy podélných kmitů.