

1. ELEKTROSTATICKÉ POLE VE VAKUU

1. 1. ELEKTRICKÝ NÁBOJ. ZÁKLADNÍ ELEKTROSTATICKÉ JEVY

Jantar – elektron (řecký název) $\Rightarrow$ stav přitahování drobných předmětů - **elektrický stav**, **zelektrovaná tělesa** (skleněná tyč + kůže, novodur + srst).

elektrický náboj – míra zelektrování (skalární veličina),
 Q (e) – jednotka = Coulomb (C), (definovaný pomocí Ampéru).

Dva druhy elektrických nábojů – kladný (na skleněné tyči),
– záporný (na novoduru).

Elektrické náboje nemohou existovat samostatně – jsou vázány na hmotné částice – **elektron**, **pozitron**, **proton**, **mion** aj.

elementární elektrický náboj (proton +, elektron -)

$$e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Elektricky neutrální atom – stejný počet elektronů v obalu a protonů v jádře,
kladný ion – ztráta jednoho nebo několika elektronů,
záporný ion – přebytek jednoho nebo více elektronů.

Elektricky neutrální těleso – rovnoměrně rozložené kladné a záporné náboje (kompenzace obou typů náboje).

Elektrování tělesa – narušení rovnosti počtu kladných a záporných nábojů (těleso je zelektrováno, nabito) – lze provést např. třením, dotykem, přenesením náboje, elektrostatickou indukcí apod.

Elektrostatické pole – nabitě částice jsou vzhledem k pozorovateli v klidu,

Elektrodynamické pole – vzniká při pohybu nabitých částic.

Bodový náboj – rozměry nabitého tělesa jsou zanedbatelné vzhledem ke vzdálenosti ostatních nabitých objektů interagujících s uvažovaným tělesem.

Hustota náboje – veličina charakterizující rozložení náboje na "větších" nabitých tělesech:

a) **Objemová hustota náboje**

$$\rho = \frac{dQ}{dV} [C.m^{-3}]. \quad (1.1)$$

b) **Plošná hustota náboje**

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} [C.m^{-2}]. \quad (1.2)$$

c) **Délková (lineární hustota náboje)**

$$\tau = \frac{dQ}{dl} [C.m^{-1}]. \quad (1.3)$$

Celkový náboj tělesa (hustota náboje jako funkce souřadnic)

$$Q = \int_V dQ \quad (\text{integrace přes celý objem } V, \text{ resp. plochu } S \text{ nebo délku } l).$$

Souhrn

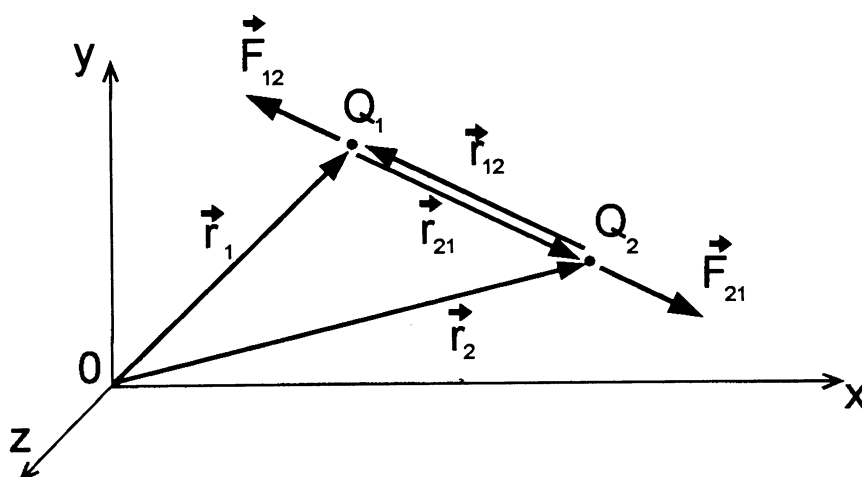
1. Elektrický náboj je vždy vázán na hmotný objekt.
2. Existují náboje kladné a záporné.
3. Pro silové účinky nabitých těles platí *princip superpozice*.
4. **Zákon kvantování elektrického náboje** říká, že všechny náboje jsou násobkem e .
5. **Zákon zachování náboje** – celkový náboj v izolované soustavě je roven algebraickému součtu všech nábojů a nemění se (příklad: anihilace elektronu a pozitronu – zánik v páru).
6. **Invariantnost náboje** – relativistický invariant (na rozdíl od hmotnosti).
7. Pohybující se náboje budí pole elektrodynamické (elektromagnetické).
8. **Zákon silového působení nábojů** – Coulombův zákon.

1. 2. COULOMBŮV ZÁKON

Ch. A. Coulomb (1785) – měření náboje pomocí torzních vah.

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – polohové vektory nábojů Q_1 a Q_2 ,

$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – udává polohu Q_2 vzhledem k Q_1 (obr. 1.1).



Obr. 1.1.

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^2} \vec{r}_{21}^0 \quad \text{obdobně} \quad \vec{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \vec{r}_{12}^0, \quad (1.5) \quad (1.6)$$

$$\text{tedy } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

$$\text{Vyjádřením } \vec{r}_{21}^0 = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} \quad \text{Coulombův zákon ve tvaru} \quad \vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}, \quad (1.7)$$

k – konstanta měřená různými metodami (E.B. Rosa, N.E. Dorsey)

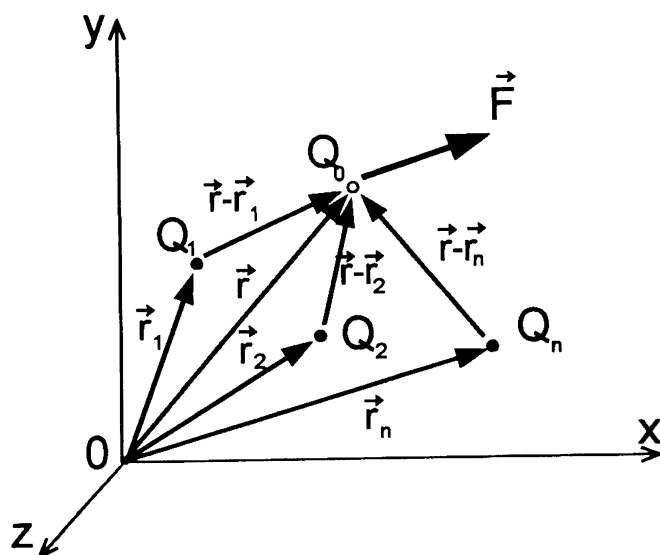
$$k = 8,98776 \cdot 10^9 \text{ C}^{-2} \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2.$$

Vyjádření pomocí *permittivity vakua* $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$. (1.8)

racionalizovaný tvar Coulombova zákona $\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$. (1.9)

Aplikace Coulombova zákona

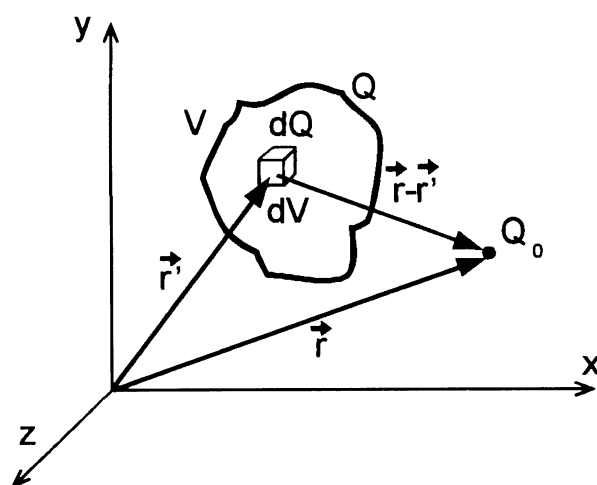
a) Silové působení soustavy bodových nábojů (obr. 1.2)



Obr. 1.2.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_0 Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1.10)$$

b) Silové působení spojitě rozloženého náboje (obr. 1.3)



Obr. 1.3.

$$\vec{F} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.11)$$

1. 3 INTENZITA ELEKTROSTATICKÉHO POLE

Náboje v klidu na sebe působí prostřednictvím svých polí.

Elektrostatické pole se projevuje silovým působením na nabitě částice.

Intenzita elektrostatického pole (v místě P, kde je Q_0)

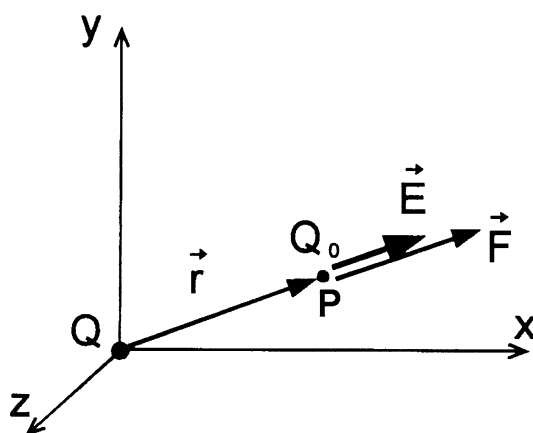
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} [N.C^{-1}] [V.m^{-1}]. \quad (1.12)$$

Q_0 – "zkušební" náboj.

Nebo platí
$$\vec{F} = Q_0 \vec{E}. \quad (1.13)$$

Výpočet intenzity elektrostatického pole v různých případech

a) Intenzita elektrostatického pole bodového náboje Q (obr. 1.4)



Obr. 1.4.

Z Coulombova zákona
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q}{r^3} \vec{r}.$$

Dosazením do vztahu (1.12) dostaneme pro intenzitu elektrostatického pole bodového náboje

v bodě $\vec{r}$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.14)$$

Z toho plyne, že $\vec{E}$ má orientaci $\vec{r}$ (pro záporný náboj je orientace opačná)
Takové **pole** se nazývá **radiální**.

b) Intenzita elektrostatického pole soustavy bodových nábojů

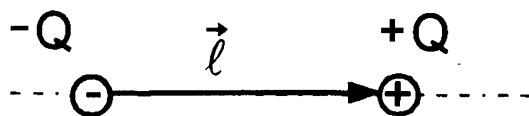
pro soustavu bodových nábojů podle obr. 1.2 platí

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (1.15)$$

Velikost i směr $\vec{E}$ se mění bod od bodu – *pole nehomogenní*.

$$\vec{E} \text{ v daném bodě} \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n \quad (1.16)$$

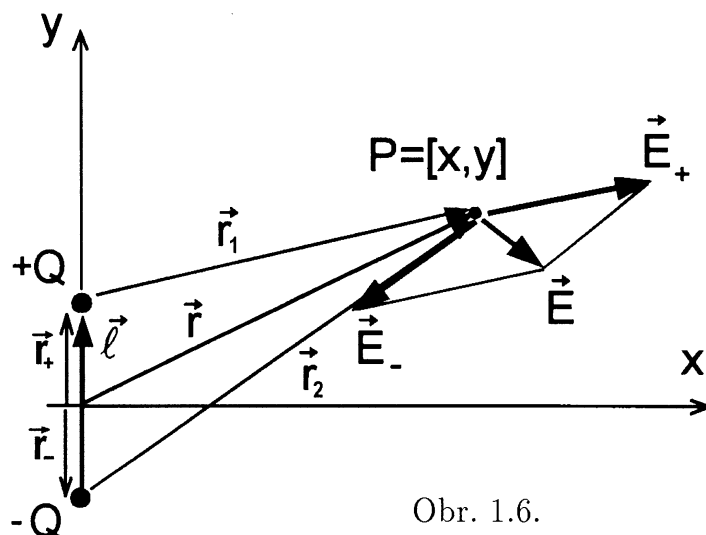
pole elektrického dipólu (viz. obr.1.5)



Obr. 1.5.

$$\text{elektrický moment dipólu} \quad \vec{p} = Q \cdot \vec{l} \quad (1.17)$$

Řešení v soustavě x, y . (obr. 1.6)



Obr. 1.6.

Poloha vyšetřovaného bodu P je dána polohovým vektorem

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y.$$

Polohové vektory nábojů $+Q$ a $-Q$

jsou
$$\vec{r}_+ = \vec{j} \frac{l}{2} \quad \vec{r}_- = -\vec{j} \frac{l}{2}.$$

Podle (1.15) resp. (1.16) výsledná intenzita $\vec{E}$ v bodě P

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{Q}{r_2^3} \vec{r}_2 \right). \quad (1.18)$$

Vyjádříme vektory

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r} - \vec{r}_+ = \vec{i}x + \vec{j}\left(y - \frac{l}{2}\right), \\ \vec{r}_{21} &= \vec{r} - \vec{r}_- = \vec{i}x + \vec{j}\left(y + \frac{l}{2}\right).\end{aligned}\quad (1.19)$$

Vyjádření jmenovatelů zlomků

$$\begin{aligned}r_1^{-3} &= \left[x^2 + \left(y - \frac{l}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = r^{-3} \left[1 - \frac{yl}{r^2} + \frac{l^2}{4r^2} \right]^{-\frac{3}{2}}, \\ r_2^{-3} &= \left[x^2 + \left(y + \frac{l}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = r^{-3} \left[1 + \frac{yl}{r^2} + \frac{l^2}{4r^2} \right]^{-\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

neboť $x^2 + y^2 = r^2$. Pro $r \gg l$, je člen $\frac{l^2}{4r^2} \ll 1$ a je možné ho zanedbat.

Použitím přibližného vzorce [pro malé a platí $(1+a)^n = (1+na)$] dostaneme

$$\begin{aligned}r_1^{-3} &\approx r^{-3} \left(1 + \frac{3yl}{2r^2} \right), \\ r_2^{-3} &\approx r^{-3} \left(1 - \frac{3yl}{2r^2} \right).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Po dosazení (1.19) a (1.20) do (1.18) a po úpravě dostaneme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{r^5} Qyl (\vec{i}x + \vec{j}y) - \frac{1}{r^3} jQl \right].$$

Výraz v kulaté závorce je roven $\vec{r}$, $Qyl = \vec{p} \cdot \vec{r}$ a $jQl = \vec{p}$, takže pro intenzitu $\vec{E}$ ve velké vzdálenosti od dipólu dostaneme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]. \quad (1.21)$$

Diskuze:

V bodě na ose dipólu je $(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} = \vec{p}r^2$ a pro intenzitu dostaneme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}.$$

V bodě P na ose souměrnosti dipólu je skalární součin $\vec{p} \cdot \vec{r} = 0$ a pro $\vec{E}$ platí

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

c) Intenzita elektrostatického pole spojitě rozloženého náboje

Náboj Q je rozložený v oblasti V s objemovou hustotou $\rho(\vec{r}')$

Intenzita pole vzbuzeného nábojem Q v bodě P, určeného $\vec{r}$ (viz obr. 1.3).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.22)$$

Podobně bychom mohli postupovat při výpočtu intenzity elektrostatického od náboje spojitě rozloženého

$$\text{na ploše } S \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1.23)$$

$$\text{na křivce } l \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\tau(\vec{r}') dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.24)$$

1. 4 ZNÁZORNĚNÍ ELEKTROSTATICKEHO POLE

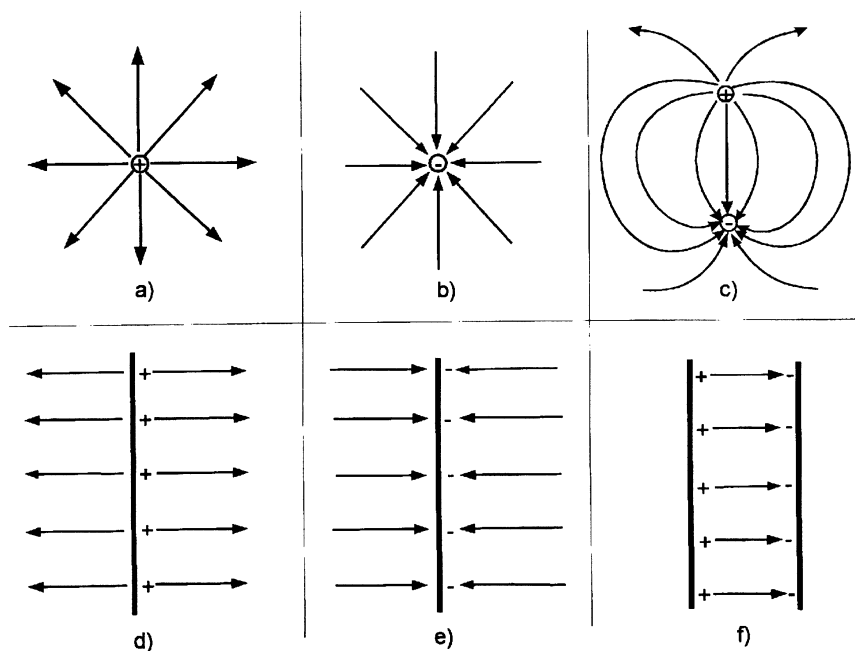
a) Siločáry elektrostatického pole

M. Faraday zavedl pro znázornění elektrostatického pole pojem *siločára*.

Siločára elektrostatického pole – orientovaná křivka probíhající prostorem tak, že v každém jejím bodě má souhlasně orientovaná tečna směr intenzity elektrostatického pole.

Vlastnosti siločar:

1. Souhlasně orientované s $\vec{E}$.
2. Matematický zápis předchozího tvrzení $\vec{E}(\vec{r}) \times d\vec{r} = 0$.
3. Siločáry elektrostatického pole vycházejí z kladných elektrických nábojů a končí na záporných.
4. Siločáry se nikde neprotínají (kdyby se protínaly, existovaly by zde dvě různé tečny). Každým bodem prochází jedna siločára.
5. Pro znázornění používáme jen několika siločar (viz obr. 1.8a až 1.8e – radiální+, radiální- ...)



Obr. 1.8.

6. Na velikost pole $\vec{E}$ můžeme usuzovat z **hustoty siločar**.

Počet siločar dN procházejících elementem plochy $dS_{\perp}$ = hustota siločar

$$\frac{dN}{dS_{\perp}} =_{\text{numericky}} E. \quad (1.28)$$

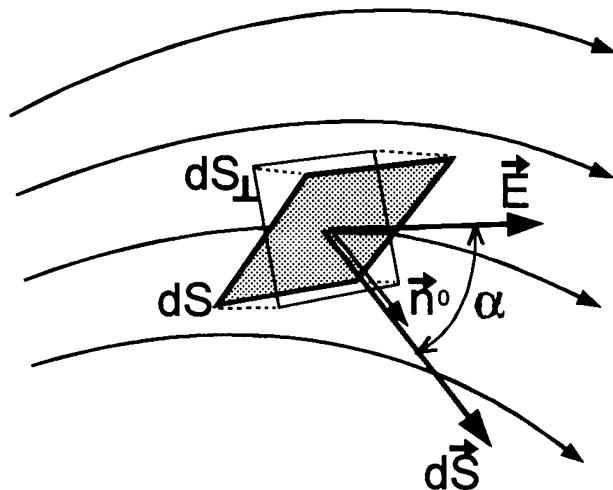
b) Tok intenzity elektrostatického pole plochou

Z rovnice (1.28) vyplývá, že počet siločar procházejících elementem $dS_{\perp}$ je

$$dN =_{\text{numericky}} E dS_{\perp}.$$

Pro případ, že $\vec{n}^0$ svírá s $\vec{E}$ úhel α (obr.1.9) je třeba uvažovat kolmý průmět $d\vec{S} = E dS \cos \alpha$ potom

$$dN =_{\text{numericky}} \vec{E} d\vec{S}.$$



Obr. 1.9.

zavedeme-li místo N *tok intenzity elektrostatického pole plochou* platí

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \alpha, \quad (1.29)$$

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E dS \cos \alpha. \quad (1.30)$$

Tok vektoru $\vec{E}$ plochou S je skalární veličina = počtu siločar

Má-li $\vec{E}$ v každém bodě S stejnou velikost a svírá-li s $d\vec{S}$ stejný úhel α , pak

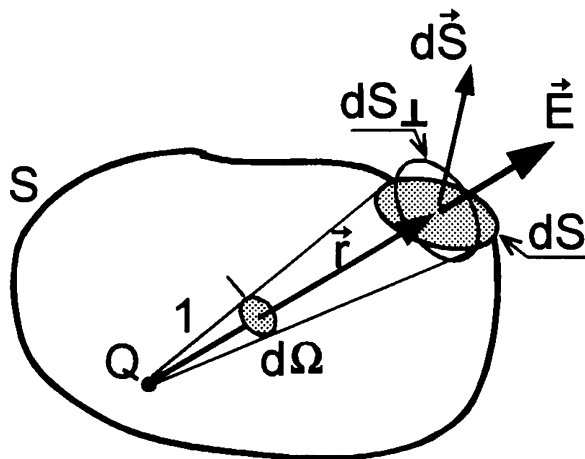
$$\Phi_e = E \cos \alpha \int_S dS = ES \cos \alpha. \quad (1.31)$$

Pro *tok uzavřenou plochou*

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS \cos \alpha. \quad (1.32)$$

1. 5 GAUSSOVA VĚTA ELEKTROSTATIKY

Vyjadřuje vztah mezi tokem intenzity elektrostatičkého pole Φ_e uzavřenou plochou S a nábojem Q uvnitř této plochy (náboj může být rozložen různým způsobem) (obr. 1.10)



Obr. 1.10.

- jeden náboj Q (obr.1. 10) budí radiální pole o $\vec{E}$, která závisí na $\vec{r}$ (1.14)

dosažením (1.14) do (1.32)

$$\Phi_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS \cos \alpha}{r^2}.$$

Avšak

$$\frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = d\Omega \quad \text{vyjadřuje velikost elementárního prostorového úhlu}$$

Pro celou uzavřenou plochu S (4π steradiánů)

$$\Phi_e = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.33)$$

Platí pro libovolnou uzavřenou plochu

- Pro n bodových nábojů uvnitř uzavřené plochy S platí pro výslednou intenzitu $\vec{E}$

$$\vec{E} = \sum_{j=1}^n \vec{E}_j.$$

a pro tok intenzity $\vec{E}(\vec{r})$ uzavřenou plochou S dostaneme

$$\Phi_e = \oint_S \sum_{j=1}^n \vec{E}_j \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^n \left(\oint_S \vec{E}_j \cdot d\vec{S} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^n Q_j.$$

Označením celkového náboje $Q_{\text{celk}} = \sum_{j=1}^n Q_j$ můžeme psát

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{celk}}{\epsilon_0}, \quad (1.34)$$

což je tzv. **Gaussova věta v integrálním tvaru**

pro náboj Q rozložený spojitě uvnitř uzavřené plochy S

$$Q_{celk} = \int_V \rho dV, \quad (1.35)$$

resp.

$$Q_{celk} = \int_{S'} \sigma dS' \quad \text{nebo} \quad Q_{celk} = \int_l \tau dl$$

Gaussova věta:

Tok intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je ve vakuu roven podílu celkového náboje uvnitř plochy a permitivity vakua

Využitím Gaussovy matematické věty

$$\int_V \text{div} \vec{E} \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

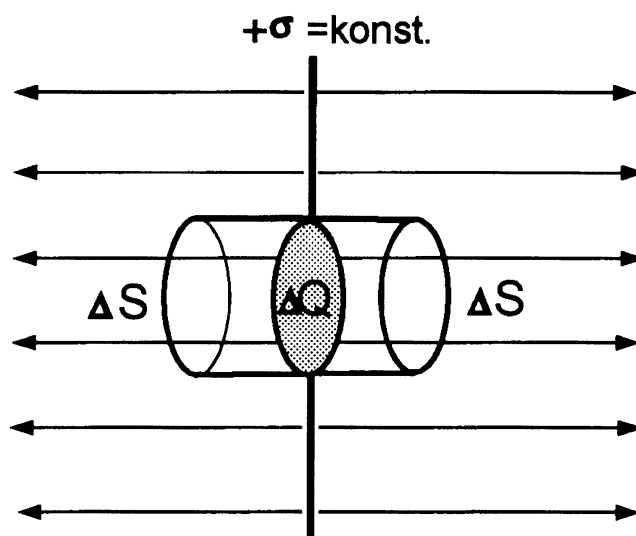
a odtud

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$

Gaussova elektrostatická věta v diferenciálním tvaru

Příklady použití Gaussovy věty

1. Výpočet velikosti intenzity elektrostatického pole náboje rozloženého na rovině s konstantní plošnou hustotou σ (obr. 1. 11)



Obr. 1.11.

- tok pláštěm je nulový
podle (1.31) je tok intenzity základnami

$$\Phi_e = 2E\Delta S$$

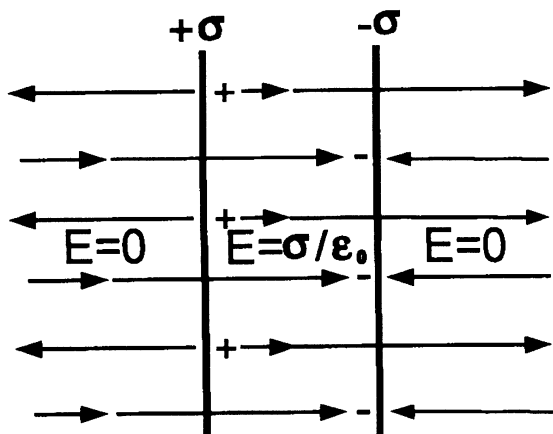
Uvnitř uzavřené plochy je náboj $\Delta Q = \sigma\Delta S$

dosazením do Gaussovy věty (1.34) obdržíme

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \text{ a odtud } E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.37)$$

Poznámka:

Pro **případ dvou rovnoběžných rovin** nabitých náboji opačných znamének rozloženými s plošnou hustotou stejné velikosti ($|\sigma_+| = |\sigma_-| = \sigma$) (viz. obr. 1.12)



Obr. 1.12.

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

V prostoru mezi rovinami se pole sčítají $E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, (1.38)

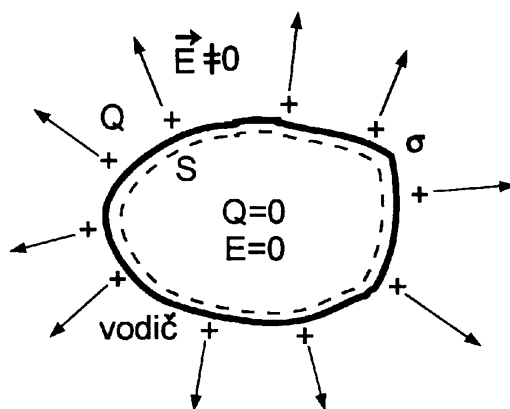
kdežto v okolním prostoru se obě pole ruší $E = 0$.

2. Intenzita elektrického pole uvnitř nabitého vodiče a v těsné blízkosti jeho povrchu

- uvnitř vodiče

Náboj nabitého vodiče je rozložen jen na povrchu (uvnitř jsou náboje kompenzovány)

Uvažujme uzavřenou plochu S vedenou těsně pod povrchem nabitého vodiče (obr. 1. 13)



Obr. 1.13.

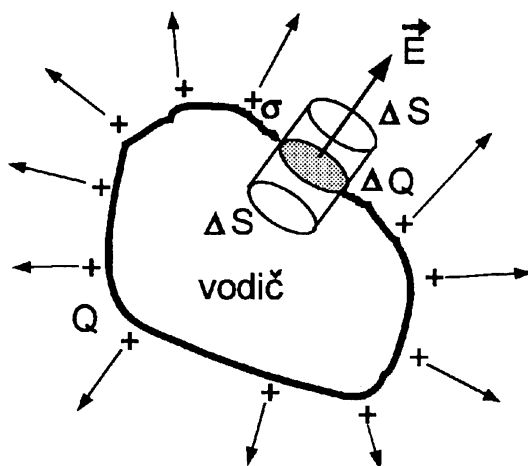
Podle Gaussovy věty

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Tok intenzity libovolnou uzavřenou plochou S , ležící uvnitř vodiče, je roven nule, pouze tehdy je-li **v celém objemu vodiče intenzita** $\vec{E} = 0$.

Pozn: pokud by $\vec{E} \neq 0$, působila by na volné elektrony síla $\vec{F} = -e\vec{E}$, což by vedlo k jejich přemisťování.

- v těsné blízkosti povrchu (obr. 1.14)



Obr. 1.14.

Tok intenzity základnou nad povrchem vodiče je

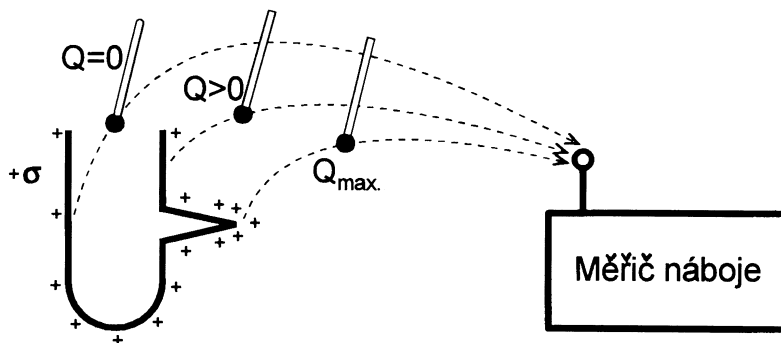
$$\Phi_e = E\Delta S.$$

dosazením $\Delta Q = \sigma\Delta S$ do Gaussovy věty

$$E\Delta S = \frac{|\sigma|\Delta S}{\epsilon_0}.$$

a úpravou $E = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$ dostaneme **Coulombovu větu** (1.39)

Poznámka: Plošná hustota náboje $\sigma(x, y, z)$ nemusí být ve všech místech povrchu nabitého vodiče stejná. Měřením bychom se mohli přesvědčit, že největší hustota náboje je na hranách a na hrotech nabitého vodiče, nejmenší hustota (téměř nulová) je v dutinách, (obr. 1.15)



Obr. 1.15.

V okolí hrotů dochází k **sršení náboje** (sání elektřiny hrotem – hromosvod)
Elektrický vítr.

3. Výpočet intenzity E elektrostatického pole nabitě vodivé koule

Koule o poloměru R nabitá nábojem Q a velmi vzdálená od okolních těles. Plošná hustota bude (stejná křivost)

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Intenzita elektrostatického pole ve vzdálenosti r od středu:

Pro $r < R$ (uvnitř) $\vec{E} = 0$.

Pro $r = R$ (v těsné blízkosti povrchu) podle Coulombovy věty

$$E = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

siločáry mají směr normály k povrchu (radiální pole).

Pro $r > R$ můžeme velikost intenzity určit pomocí Gaussovy věty

$$\text{tok intenzity} \quad \Phi_e = ES = 4\pi r^2,$$

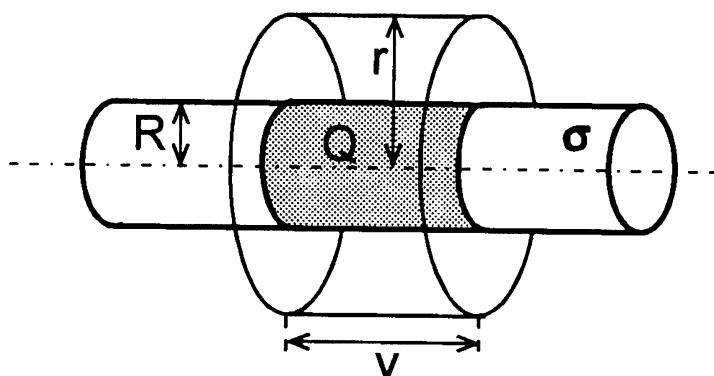
takže
$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

a odtud
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Závěr: *Elektrické pole nabitě vodivé koule ve vzdálenosti $r > R$ je stejné jako pole bodového náboje Q , který by byl umístěn uprostřed*

4. Výpočet velikosti intenzity elektrostatického pole od náboje rozloženého na velmi dlouhé válcové ploše s konstantní plošnou hustotou σ

Poloměr nabitě válcové plochy označíme R a využijeme Gaussovu větu pro stanovení E ve vzdálenosti $r > R$ od osy válcové plochy (obr. 1.16).



Obr. 1.16.

Tok intenzity pláštěm válce

$$\Phi_e = ES_{pl} = E 2\pi r v.$$

Náboj Q uvnitř uzavřené plochy je náboj na části nabitě válcové plochy výšky v

$$Q = 2\pi R v \sigma .$$

Dosazením do Gaussovy věty (1.34) obdržíme

$$E 2\pi r v = \frac{2\pi R v \sigma}{\epsilon_0} .$$

$$\text{odtud} \quad E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} . \quad (1.40)$$

Poznámka:

Gaussova věta platí i pro pole stacionární i nestacionární a je i jednou ze čtyř základních Maxwellových rovnic popisujících elektromagnetické pole

1.6 POTENCIÁL ELEKTROSTATICKÉHO POLE

- Skalární veličina, která souvisí s potenciální energií náboje v elektrostatickém poli.

1. Práce při přenášení náboje v elektrostatickém poli

Působí-li na náboj kromě síly $\vec{F} = Q_0 \vec{E}$ současně vnější síla $\vec{F}_v = -\vec{F} = -Q_0 \vec{E}$, je výsledná síla působící na náboj Q_0 rovna nule.

Při přemístění náboje Q_0 podél orientovaného elementu dráhy $d\vec{l}$ (obr. 1. 17) se vykoná práce

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} .$$

Při přemístění náboje Q_0 z bodu M do N po křivce l bude celková práce A dána dráhovým integrálem

$$A = Q_0 \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (1.41)$$

Vnější síla při tomto přemístění náboje Q_0 z bodu M do N po křivce l vykoná práci

$$A_v = -Q_0 \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (1.42)$$

Obě práce se liší jen znaménkem.

2. Potenciální energie náboje v elektrostatickém poli

Náboje vzbuzující pole $\vec{E}$ a náboj Q_0 lze považovat za soustavu, ve které působí vnitřní síly. Síla $\vec{F} = Q_0 \vec{E}$ je výslednicí vnitřních sil působících na náboj Q_0 .

V této soustavě lze zavést **potenciální energii** W_p

$$dW_p = \vec{F}_v \cdot d\vec{l} = -Q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (1.43)$$

Při přemístění náboje Q_0 v poli z bodu N do bodu M po křivce l je práce vnější síly dána vztahem (1.41), takže přírůstek potenciální energie náboje Q_0 je

$$\Delta W_p = W_{pM} - W_{pN} = -Q_0 \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (1.44)$$

Rovnice (1.44) určuje rozdíl potenciální energie náboje Q_0 v bodech M a N. Potenciální energie náboje je touto rovnicí určena až na konstantu.

Tuto neurčitost odstraníme volbou **místa nulové potenciální energie**. (Zpravidla v ∞ , prakticky povrch Země).

Pro $N \rightarrow \infty$ je $W_{pN} = 0$

potenciální energie náboje Q_0 v libovolném místě M elektrostatického pole je funkcí místa (polohy bodu M) v elektrostatickém poli.

$$W_{pM} = -Q_0 \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_0 \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.45)$$

Potenciální energie náboje Q_0 je rovna práci, kterou vykoná vnější síla při přenesení tohoto náboje z nekonečna do daného bodu M (nebo opačně).

3. Potenciál elektrostatického pole

$$\varphi_M = \frac{W_{pM}}{Q_0} = - \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.46)$$

Potenciál elektrostatického pole v bodě M je:

- číselně roven potenciální energii kladného jednotkového náboje v daném místě pole,
- číselně roven práci vykonané vnější silou při přenesení kladného jednotkového náboje z nekonečna do daného bodu pole,
- číselně roven práci vykonané polem při přenesení kladného jednotkového náboje z bodu pole do nekonečna.

Potenciál je **skalární veličina** – $J \cdot C^{-1} = V$ (volt)

Rozdíl potenciálů $\varphi_M - \varphi_N$ nazýváme **elektrické napětí** U_{MN} mezi bod M a N pole E .

$$U_{MN} = \varphi_M - \varphi_N = \frac{W_{pM}}{Q_0} - \frac{W_{pN}}{Q_0} = - \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.47)$$

V homogenním poli ($E = \text{konst.}$) platí

$$U_{MN} = \int_M^N E dl \cos \alpha = E \int_M^N dl \cos \alpha = E \int_M^N dr = Ed. \quad (1.48)$$

$dr = dl \cos \alpha$ je velikost průmětu vektoru posunutí do směru E , d vzdálenost bodů M a N.

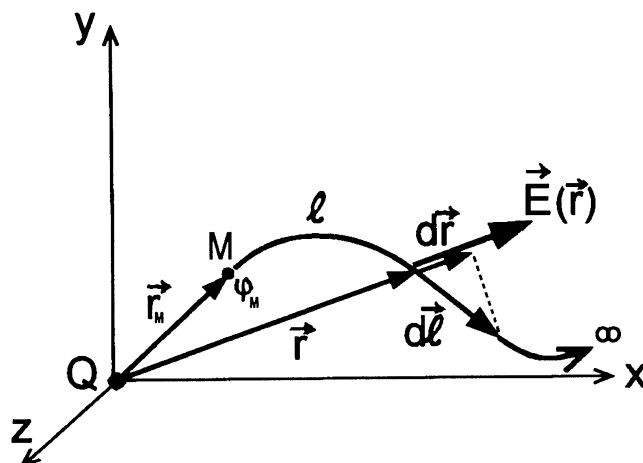
Práce A je přímo úměrná velikosti přenášeného náboje a elektrického napětí mezi body M a N

$$A = Q_0 \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_0 (\varphi_M - \varphi_N) = Q_0 U_{MN}. \quad (1.49)$$

4. Výpočet potenciálu elektrostatických polí některých soustav nábojů

Pro $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ můžeme potenciál vyjádřit jako funkci souřadnic, tj. $\varphi = \varphi(x, y, z)$

- **pole bodového náboje Q** (umístěný v počátku), poloha bodu M je určena polohovým vektorem $\vec{r}_M$ (obr.1.18)



Obr. 1.18.

dosazením vztahu pro $\vec{E}_r$ do vztahu 1.46 dostaneme

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_M}^{\infty} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{l} ,$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{l} = r dl \cos \alpha = r dr .$$

Po dosazení

$$\varphi_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_M}^{\infty} \frac{r dr}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_M}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_M} . \quad (1.50)$$

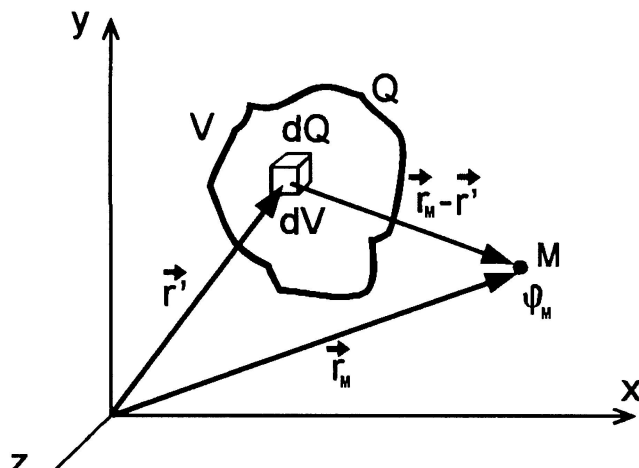
Poznámka: stejný výsledek platí pro potenciál elektrického pole vodivé koule o poloměru R . Je-li Q záporný potom potenciál je rovněž záporný.

- potenciál pole buzeného **soustavou n bodových nábojů** $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. rozmístěných v bodech $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

Pro potenciál v bodě M určeném $\vec{r}_M$ platí

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{|\vec{r}_M - \vec{r}_j|} \quad (1.51)$$

- potenciál buzený **nábojem spojitě rozloženým s objemovou hustotou** náboje $\rho(\vec{r}')$ (obr. 1.19)



$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r}_M - \vec{r}'|}. \quad (1.52)$$

- Potenciál buzený *nábojem spojitě rozloženým na ploše S s plošnou hustotou* náboje $\sigma(\vec{r}')$

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS}{|\vec{r}_M - \vec{r}'|}. \quad (1.53)$$

- Potenciál buzený *nábojem spojitě rozloženým na křivce l s lineární hustotou* náboje $\tau(\vec{r}')$

$$\varphi_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau(\vec{r}') dl}{|\vec{r}_M - \vec{r}'|}. \quad (1.54)$$

5. Vztah mezi intenzitou a potenciálem elektrostatického pole

$$d\varphi = \frac{dW_p}{Q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (1.55)$$

$d\varphi$ je úplný diferenciál

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Vektory $\vec{E}$ a $d\vec{l}$ ve složkách:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z \quad d\vec{l} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Pro skalární součin

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

dosazením do (1.55) a porovnáním výrazů na obou stranách rovnice

$$\vec{E} = - \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = -grad \varphi \quad (1.56)$$

Gradient potenciálu

vektor, jehož velikost se v každém bodě elektrostatického pole rovná maximálnímu přírůstku potenciálu připadající na jednotkovou vzdálenost a má směr maximálního růstu potenciálu.

Poznámka: znaménko mínus vyjadřuje, že směr maximálního růstu potenciálu jde proti směru intenzity pole.

6. Ekvipotenciální plochy.

Plocha, ve které má potenciál stejnou hodnotu. Rovnice této plochy je

$$\varphi(x, y, z) = C.$$

kde C je konstantní hodnota potenciálu (bodový náboj – soustředné koule, homogenní pole – rovnoběžné roviny kolmé k siločárám).

Vlastnosti ekvipotenciálních ploch:

- přemístění náboje po ekvipotenciální ploše – práce sil elektrostatického pole = 0 (viz. 1.49)

Z toho plyne, že α (úhel mezi vektory E a $d\vec{l}$) bude 90° , tj. $\vec{E}$ je kolmý k ekvipotenciální ploše.

Elektrické siločáry jsou všude kolmé na ekvipotenciální plochy.

- Každým bodem prochází jediná siločára (ekvipotenciální plochy se nikde neprotínají)
- Ekvipotenciální plochy v radiálním poli jsou soustředné kulové plochy.
- Siločáry jsou kolmé k povrchu nabitého vodiče $\Rightarrow$ ve všech bodech povrchu vodiče má elektrický potenciál stejnou hodnotu φ_s . Uvnitř vodiče je $\vec{E} = 0$ a podle (1.56) i $\text{grad}\varphi = 0$. Z toho vyplývá, že ***elektrický potenciál je v celém objemu vodiče konstantní a je roven potenciálu na jeho povrchu.***

7. Další vlastnosti elektrostatického pole

Práce, kterou vykoná elektrostatické pole při přenesení náboje Q_0 po libovolné uzavřené křivce l zpět do počáteční polohy ($M \equiv N$) je roven 0.

Potom
$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.57)$$

Tato pole nazýváme ***konzervativní*** nebo ***potenciálová***.

Využitím Stokesovy věty
$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Platí
$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad \Rightarrow \text{Pole nevírové} \quad (1.58)$$

1.7 NENABITÝ VODIČ V ELEKTROSTATICKÉM POLI

1. Kovové vodiče

V kovových tělesech – ***volné elektrony*** (valenční elektrony atomů).

Není-li těleso nabit, je náboj volných elektronů kompenzován zcela kladnými ionty krystalové mřížky kovu. ***Kladné ionty*** jsou vázány na uzlové body krystalové mřížky a ***nepohybují se***.

Počet volných elektronů u kovů:

${}^{64}_{29}\text{Cu}$ – 29 volných elektronů (slupky 2, 8, 18 a 1), $M_m = 63,54 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. 1 mol látky obsahuje $6,023 \cdot 10^{23}$ atomů

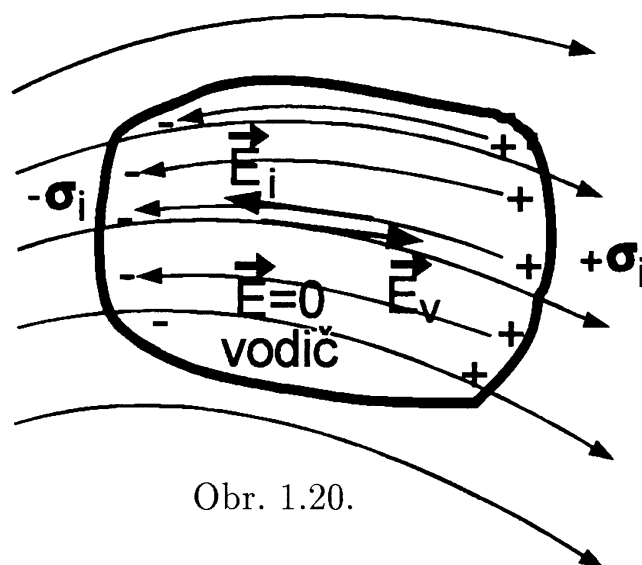
počet volných elektronů v $1 \text{ m}^3 \text{ Cu}$

$$n_0 = \frac{6,023 \cdot 10^{23} \cdot 8,9 \cdot 10^3}{63,54 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28}.$$

Celkový náboj volných elektronů v $1 \text{ m}^3 \text{ Cu}$ je $-n_0 \cdot e = -1,3 \cdot 10^{10} \text{ C}$ (zcela kompenzován nábojem kladných iontů).

2. Elektrostatická indukce

Při vložení nenabitého vodiče do pole o intenzitě $\vec{E}_0$ působí na nabitě částice s nábojem q síly $\vec{F} = q\vec{E}_0 \Rightarrow$ volné náboje (v kovech elektrony) se budou přemísťovat – **elektrostatická indukce** (obr. 1.20)



Obr. 1.20.

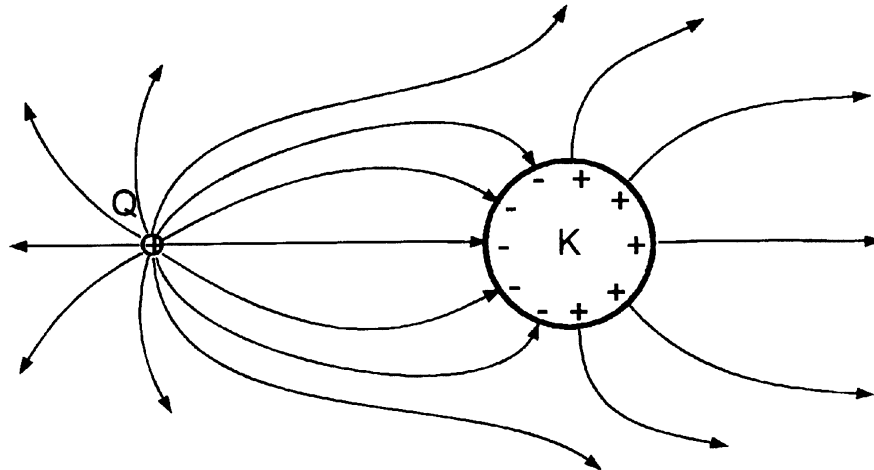
Indukované náboje vytváří vlastní pole o intenzitě $\vec{E}_i$ (orientovaná proti vnějšímu poli).

Ustálený stav
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0 \quad (1.59)$$

Pole indukovaných nábojů na povrchu vodiče ruší uvnitř vodiče vnější pole $\vec{E}_0$ (za cca 10^{-12} s)

Původně nenabitě těleso se změní v **elektrický dipól**.

Pomocí elektrostatické indukce je možné provádět **nabíjení vodičů**. (obr. 1.21)

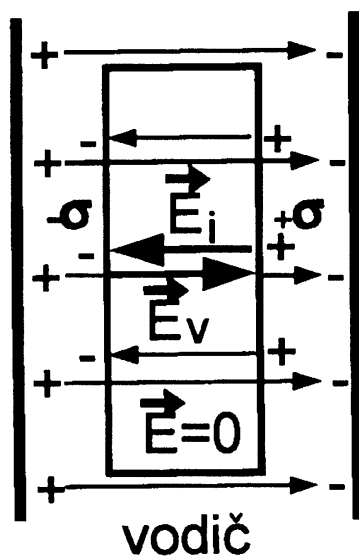


Obr. 1.21.

Elektrostatické stínění – využívá skutečnosti, že uvnitř vodiče (i s dutinou) je $E = 0$.

Protože uvnitř vodiče je $E = 0$ je **potenciál v celém objemu vodiče konstantní** a je roven potenciálu na jeho povrchu. Povrch vodiče je ekvipotenciální plochou – siločáry elektrostatického pole jsou kolmé na povrch vodiče (obr. 1.21 – skládání radiálního pole s polem indukovaných nábojů na vodiči K).

Vodič ve tvaru tenké kovové desky (obr. 1.22).



Obr. 1.22.

V důsledku elektrostatické indukce se na stěnách indukují náboje s plošnou hustotou $+\sigma_i, -\sigma_i$.

Velikost intenzity elektrostatického pole indukovaných nábojů

$$E_i = \frac{|\sigma_i|}{\epsilon_0} \quad (\text{vektor } \vec{E}_i \text{ má opačnou orientaci k } \vec{E}_0).$$

Výsledná intenzita pole uvnitř vodiče musí být nula, takže

$$E_0 - \frac{|\sigma_i|}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow |\sigma_i| = \epsilon_0 E_0 \quad (1.60)$$

Poznámka: V Maxwellově teorii kromě $\vec{E}$ zavádíme **vektor elektrické indukce** $\vec{D}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (1.61)$$

Z toho vyplývá, že $\vec{D} = \sigma_i [C.m^{-2}]$

1. 8. KAPACITA VODIČŮ. KONDENZÁTORY

Tělesa různého tvaru mají při nabití stejným nábojem různý potenciál (závisí na tvaru, vzdálenosti okolních vodičů a na prostředí, kterým jsou obklopena).

1. Kapacita osamoceného vodiče

$$Q = \oint_S \sigma dS.$$

Potenciál φ_s v libovolném bodě N na povrchu (podle 1.54)

$$\varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma dS}{r_N},$$

kde r_N je vzdálenost bodu N od elementu plochy dS na povrchu vodiče.

Zvětšením náboje n -krát $\Rightarrow Q' = nQ = \oint_S n\sigma dS$ a také $\sigma' = n\sigma$

Potenciál na povrchu vodiče

$$\varphi_s' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{n\sigma dS}{r_N} = n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma dS}{r_N} = n\varphi_s.$$

Celkový náboj na osamoceném vodiči a potenciál na jeho povrchu jsou **přímo úměrné veličiny**

$$Q = C\varphi_s. \quad (1.62)$$

Konstanta úměrnosti C se nazývá **kapacita** osamoceného vodiče (ve vakuu je C funkcí geometrického tvaru).

Jednotka kapacity je 1 F a platí 1 F = C · V⁻¹ (1 F je příliš velká jednotka).

Používají se dílčí jednotky: 1 μF = 10⁻⁶ F, 1 nF = 10⁻⁹ F, 1 pF = 10⁻¹² F

$$C = \frac{Q}{\varphi_s}. \quad (1.63)$$

Kapacita – schopnost jímat elektrický náboj.

Příklad: Kapacita osamocené koule o poloměru R

$$\varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad Q = 4\pi\epsilon_0 R \varphi_s, \text{ porovnáním s (1.62) } C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

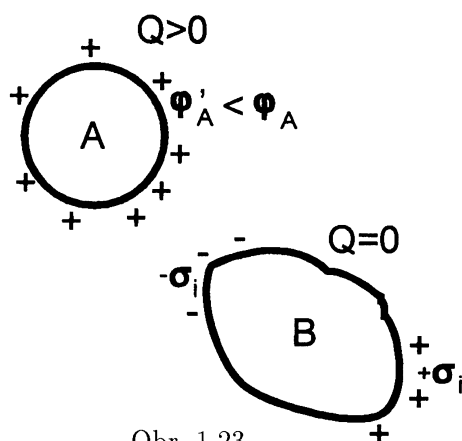
Kapacitu 1 F by musela mít koule o $R = 10^7$ km.

2. Kapacita soustavy dvou vodičů

Kapacita osamoceného vodiče A nabitého nábojem Q na potenciál φ_A

$$C = \frac{Q}{\varphi_A}.$$

V blízkosti necht' je nenabitý vodič b (obr. 1.23)



Obr. 1.23.

Potenciál elektrostatického pole indukovaných nábojů v místě A má opačné znaménko jako φ_A , takže potenciál na povrchu vodiče A je nyní φ_A' ($|\varphi_A'| < |\varphi_A|$).

Při stejném náboji Q se zvětšila kapacita C_A

$$C_A' = \frac{Q}{\varphi_A'} > \frac{Q}{\varphi_A} = C_A.$$

Poznámka: uzemněním vodiče B se ještě více sníží φ_A' a tím zvětší C_A' .

Bude-li tvar vodiče B takový, že bude obklopovat vodič A, nebo bude-li v těsné blízkosti vodiče A, bude kapacita ještě větší.

Sestava takových vodičů se nazývá **kondenzátor**.

3. Kapacita kondenzátorů

Vodič A nabitý nábojem Q , vodič B má náboj $-Q$ (tok intenzity z kladně nabitého vodiče vstupuje celý do druhého vodiče). Potom kapacita kondenzátoru nezávisí na okolních vodičích.

Kapacita kondenzátoru
$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{Q}{U_{AB}}. \quad (1.65)$$

a) **deskový kondenzátor**

Náboj Q je rozložen s plošnou hustotou náboje σ , plocha desek S , vzdálenost desek je d .

$$Q = \sigma S.$$

Napětí mezi deskami
$$U = Ed,$$

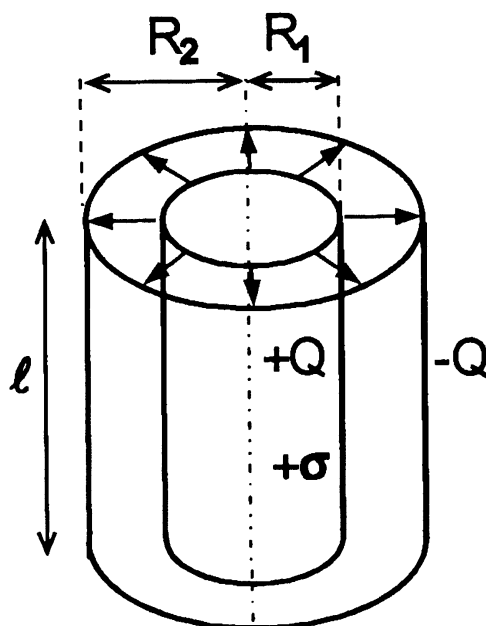
kde
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

takže
$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d.$$

Dosazením do (1.65)
$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (1.66)$$

b) **válcový kondenzátor**

Dvě souosé válcové elektrody (viz. obr. 1.24) s poloměry R_1, R_2 .



Obr. 1.24.

Při dostatečně dlouhých elektrodách jsou siločáry kolmé na osu kondenzátoru. Intenzita elektrostatického pole na velmi dlouhé válcové ploše

$$E = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}.$$

Napětí U mezi elektrodami kondenzátoru podle (1.48)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Je-li délka kondenzátoru l , pak náboj na vnitřní elektrodě

$$Q = 2\pi R_1 l \sigma.$$

Dosazením do (1.65) dostaneme pro kapacitu vztah

$$C = \frac{2\pi R_1 l \sigma}{\frac{\sigma R_1}{\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.67)$$

Poznámka:

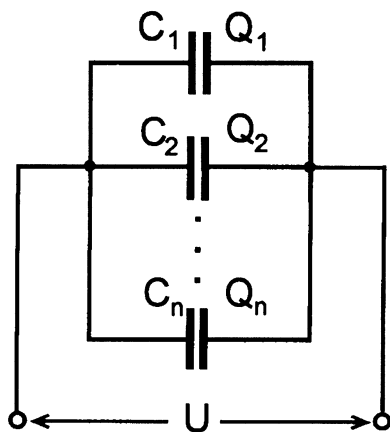
je-li prostor mezi deskami vyplněn dielektrikem (izolantem) pak

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (1.68)$$

Bezrozměrná veličina ϵ_r se nazývá **relativní permitivita** a charakterizuje dané dielektrikum.

4. Spojování kondenzátorů

a) **Paralelní spojení kondenzátorů** (pro získání větší kapacity než má kterýkoliv z kondenzátorů spojených) (obr. 1.25).



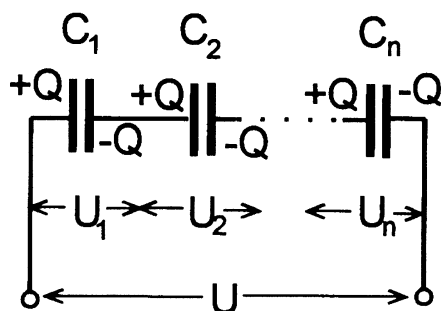
Obr. 1.25.

Celkový náboj Q je dán

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = C_1 U + C_2 U + \dots + C_n U \quad (1.69)$$

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (1.70)$$

- b) **Sériové spojení kondenzátorů** (obr. 1.26) (použití - chceme-li vytvořit kondenzátor na vyšší napětí než je jmenovité napětí jednotlivých kondenzátorů).



Obr. 1.26.

Při napětí U se nabijí kondenzátory stejným nábojem Q (vnitřní elektrody se nabíjí elektrostatickou indukcí)

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \quad (1.71)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (1.72)$$

Výsledná kapacita je vždy menší než nejmenší kapacita zapojená v sérii (celkové napětí se rozdělilo a zmenšilo se jejich elektrické namáhání)

5. Některé typy kondenzátorů

- Svitkové kondenzátory.
- Kondenzátory s proměnnou kapacitou (dolad'ovací – trimry).
- Elektrolytické kondenzátory.
- Keramické kondenzátory (velká kapacita při malých rozměrech).

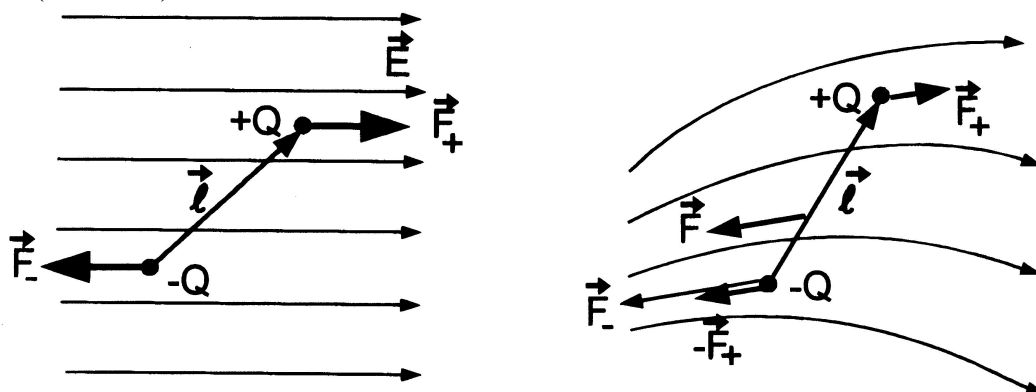
1. 9. ELEKTROSTATICKÉ POLE V DIELEKTRIKU

1. Elektrický dipól ve vnějším elektrostatickém poli

Možnost popisu vlastností elektricky nevodivých látek (dielektrik).

a) Elektrický dipól v homogenním elektrostatickém poli:

Pole o intenzitě $\vec{E}$ vyvolává na náboje $+Q$ a $-Q$ síly $\vec{F}_+ = Q\vec{E}$ a $\vec{F}_- = -Q\vec{E}$, které tvoří dvojici sil (obr.1. 27).



Otáčivý účinek této dvojice sil je charakterizován momentem dvojice sil

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times Q\vec{E} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad (1.73)$$

kde $\vec{p}$ je elektrický moment dipólu.

Pro případ, kdy $\vec{p}$ je souhlasně orientované s $\vec{E}$ hovoříme o *stabilní* poloze – $\vec{M} = 0$.

Pro případ, kdy $\vec{p}$ má opačnou orientaci vzhledem k $\vec{E}$ ($\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{E}$) je $\vec{M} = 0$, ale poloha je *labilní*.

b) Elektrický dipól v nehomogenním elektrostatickém poli (obr.1.28):

náboj $-Q$ je v místě o intenzitě $\vec{E}_1$ a náboj $+Q$ v místě o intenzitě $\vec{E}_2$. Síly působící na dipól jsou $\vec{F}_+ = Q\vec{E}_2$ a $\vec{F}_- = -Q\vec{E}_1$.

Pro $E_1 > E_2$ bude $F_- > F_+$. Síly působí jednak:

- otáčivým účinkem, charakterizovaným momentem $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_2$,
- translační silou $\vec{F}$ (vtahuje dipól do míst o větší intenzitě pole).

c) Elektrický kvadrupól – útvar složený ze 4 nábojů

d) Elektrické multipóly – obecnější útvary

Poznámka:

Výpočet translační síly:

Určení z energetické bilance, neboť platí vztah $\vec{F} = -\text{grad}W_p$. Potenciální energii dipólu určíme jako součet potenciálních energií náboje $+Q$ a $-Q$

$$W_p = Q(\varphi_2 - \varphi_1),$$

kde φ_2, φ_1 jsou potenciály vnějšího pole v místech nábojů $+Q$ a $-Q$.

Pro krátký dipól: $\varphi_2 - \varphi_1 = \vec{l} \cdot \text{grad}\varphi$,

takže $W_p = Q\vec{l} \cdot \text{grad}\varphi = \vec{p} \cdot \text{grad}\varphi = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Pro translační sílu: $\vec{F} = -\text{grad}W_p = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (1.74)$

2. Polarizace dielektrika

Dielektrikum (nevodič, izolant) – za normálních podmínek neobsahuje větší počet volných nábojů.

Nabitě částice v dielektriku jsou vázány na atomy nebo molekuly látky (nepřemísťují se).

Polarizace dielektrika – odezva dielektrika na přítomnost elektrického pole.

Dielektrika – **polární**,
nepolární.

Polární dielektrika mají nenulový dipólový moment ($\vec{p}_a \neq 0$) i bez přítomnosti vnějšího pole.

Nepolární dielektrika – vyznačují se středovou souměrností a mají nulový dipólový moment ($\vec{p} = 0$).

Dielektrika makroskopicky – na povrchu mají **vázaný náboj** (nelze ho od tělesa oddělit. Náboj z nabitých vodičů lze odvést na jiné vodiče (**volný náboj**).

- Elektronová polarizace** – posunutí "těžiště" záporného náboje vzhledem k "těžišti" kladného náboje v atomu ($\vec{p}_a \neq 0$). Deformace elektronových obalů sleduje změny E až do kmitočtů 10^{-15} Hz.
- Iontová polarizace** – změni se relativní polohy iontů v molekulách dielektrika. Molekulová polarizace se uplatňuje i v polích o změně kmitočtu do 10^{-13} Hz.
- Orientační polarizace** – projevuje se u dielektrik s polárními molekulami (nenulový moment bez přítomnosti pole). Elektrické momenty se *natočí* ve směru pole.

3. Vektor elektrické polarizace $\vec{P}$:

Popis polarizace dielektrika makroskopicky

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_a}{\Delta V}, \quad (1.75)$$

Vektor elektrické polarizace $\vec{P}$ se rovná elektrickému momentu objemové jednotky dielektrika (jednotka – $C \cdot m^{-2}$).

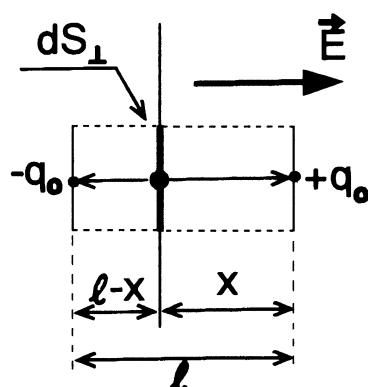
Při popisu uvažujme, že všechny elementární dipóly $\vec{p}_a$ jsou stejně velké a stejně orientované.

Elektrická polarizace je dána součtem všech momentů $\vec{p}_a$ v objemové jednotce dielektrika

$$\vec{P} = n_0 \vec{p}_a. \quad (1.76)$$

n_0 – počet molekul v objemové jednotce.

Jiné vyjádření fyzikálního významu $\vec{P}$ (obr. 1.29):



Obr. 1.29.

Posun *kladných nábojů* při působení pole o x , *záporných nábojů* o vzdálenost $l - x$ opačným směrem.

Tím se v dielektriku vytvoří elementární dipóly s náboji q_0 a $-q_0$ posunutými o l ve směru elektrického pole.

Uvažujme v daném místě plošku $dS_{\perp}$, kolmou ke směru posunutí elektrických nábojů. Při polarizaci projdou plochou $dS_{\perp}$ všechny kladné náboje, které byly od $dS_{\perp}$ ve vzdálenosti menší než x (proti směru pole) – viz. obr. 1.29.

Při polarizaci n_0 elementárních dipólů:

- kladný náboj $dQ_{p+} = n_0 q_0 x dS_{\perp},$
- záporný náboj (opačně) $dQ_{p-} = n_0 q_0 (l - x) dS_{\perp}.$

Celkový náboj plochou $dS_{\perp}$:

$$dQ_p = dQ_{p+} + dQ_{p-} = n_0 q_0 x dS_{\perp} + n_0 q_0 (l - x) dS_{\perp} = n_0 q_0 l dS_{\perp}.$$

Součin $q_0 l$ je velikost středního elektrického momentu p_a molekul dielektrika

$$dQ_p = n_0 q_0 l dS_{\perp} = n_0 p_a x dS_{\perp} \quad (1.77)$$

Podle (1.76) je $n_0 p_a = P$, takže

$$P = \frac{dQ_p}{dS_{\perp}}. \quad (1.78)$$

Velikost vektoru polarizace je rovna náboji, který při polarizaci dielektrika prošel jednotkovou plochou, kolmou k vektoru polarizace.

V případě, že ploška dS není kolmá a její normála svírá s $\vec{P}$ úhel α , potom její průmět do kolmého směru má velikost $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$. Rovnice (1.77) má tvar

$$dQ_p = P dS \cos \alpha = \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

Celkový náboj Q_p

$$Q_p = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (1.79)$$

Další úvaha k objasnění fyzikálního významu $\vec{P}$:

- rozdělení elektrického náboje na elektrodách deskového kondenzátoru $+\sigma$ a $-\sigma$,
- homogenní elektrostatické pole o intenzitě E_0 ,
- mezi elektrodami je dielektrická deska o tloušťce l (obr.1.30),
- vznik vázaného náboje na povrchu desky $-\sigma_p, +\sigma_p$,
- ze siločar vytvoříme tenkou trubici o plochách podstavy $dS_1 = dS_2 = dS$.

Vázané náboje na těchto ploškách

$$+dQ = \sigma_p dS \quad \text{a} \quad -dQ = -\sigma_p dS$$

tvoří makroskopický dipól s elektrickým momentem

$$d\vec{p} = dQ \vec{l} = \sigma_p dS \vec{l},$$

kde $\vec{l}$ je vektor určující polohu náboje $+dQ$ vzhledem k náboji $-dQ$.

Objem tohoto makroskopického dipólu je $dV = dS l$.

$d\vec{p} = \sum_{\Delta V} \vec{p}_a$ vektorový součet všech elementárních dipólů v objemu dV , potom

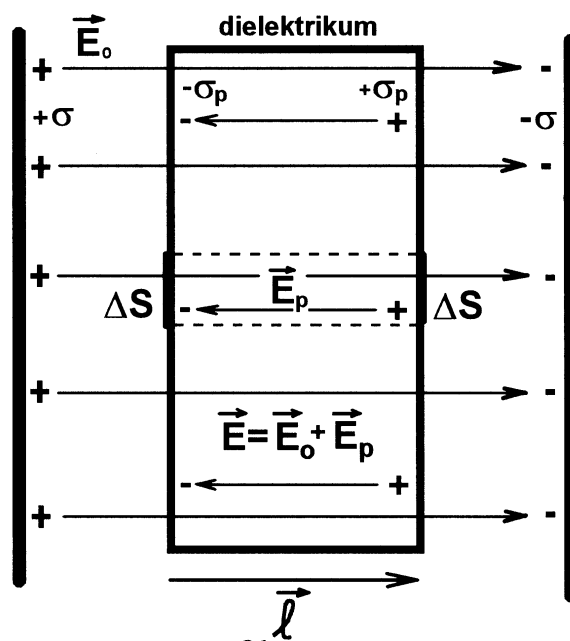
$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\sigma_p dS \vec{l}}{dS l} = \sigma_p \vec{l}^0, \quad (1.80)$$

$\vec{l}^0$ je jednotkový vektor ve směru $\vec{l}$.

Velikost vektoru polarizace $\vec{P}$ se rovná plošné hustotě σ_p vázaného náboje na povrchu dielektrika (je kolmý ke směru vnějšího pole).

4. Elektrostatické pole v dielektriku

Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku (obr. 1.30).



Obr. 1.30.

Vázané náboje vytvoří uvnitř dielektrika pole o intenzitě $\vec{E}_p$, které má opačnou orientaci než intenzita $\vec{E}_0$ od volných nábojů na elektrodách kondenzátoru.

Intenzita výsledného elektrostatického pole $\vec{E}$ v dielektriku

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p. \quad (1.81)$$

Příklad dielektrické desky

$$\vec{E}_p = -\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \vec{l}^0. \quad (1.82)$$

Použitím rovnice (1.80)

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (1.83)$$

výsledná intenzita pole v dielektriku

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (1.84)$$

Intenzita $\vec{E}$ v dielektriku je **menší** než $\vec{E}_0$ ve vakuu.

Uvažujme dále "**lineární dielektrika**" pro něž

$$\vec{p}_a = \alpha \vec{E}. \quad (1.85)$$

α polarizovatelnost dielektrika (konstanta pro dané dielektrikum)

dosazením (1.85) do (1.76) dostaneme

$$\vec{P} = n_0 \alpha \vec{E}. \quad (1.86)$$

použitím (1.83) můžeme vyjádřit

$$\vec{E}_p = -\frac{n_0 \alpha}{\epsilon_0} \vec{E} = -\kappa_e \vec{E}, \quad (1.87)$$

kde konstanta

$$\kappa_e = \frac{n_0 \alpha}{\epsilon_0}. \quad (1.88)$$

se nazývá **elektrická susceptibilita** dielektrika (nezáporné bezrozměrné číslo).

Výsledná intenzita $\vec{E}$ pole v lineárním dielektriku s využitím (1.81) vychází

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \kappa_e \vec{E},$$

odtud

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \kappa_e}.$$

Konstanta

$$1 + \kappa_e = \epsilon_r \quad (1.89)$$

se nazývá **relativní permitivita dielektrika** a platí $\epsilon_r \geq 1$ (bezrozměrné číslo)

Intenzita elektrostatického pole v dielektriku je

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}, \quad (1.90)$$

tedy je ϵ_r - krát menší než intenzita $\vec{E}_0$ pole od volných nábojů ve vakuu.

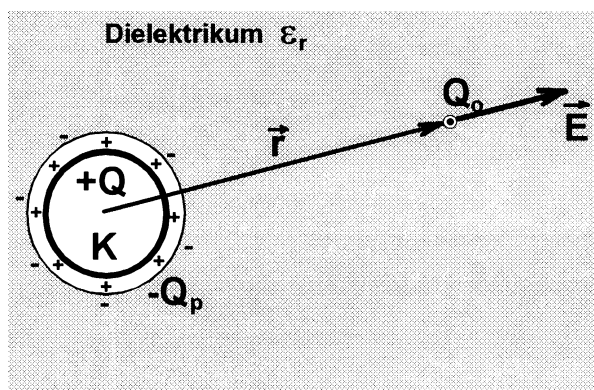
Poznámka: rozdíl mezi relativní permitivitou plynů a vakua je minimální (nepatrně se odlišují od 1), proto je zanedbáváme.

5. Síly mezi elektrickými náboji v dielektriku

V plynech a kapalinách je situace jednodušší.

V pevném dielektriku kromě elektrických sil působí síly vyvolané deformací krystalové mřížky (izotropní dielektrikum se v blízkosti rozhraní stává anizotropní).

Uvažujme případ (obr. 1.31) – vodivá koule K nabitá nábojem $+Q$ umístěná v nekonečném homogenním izotropním dielektriku.



Obr. 1.31.

Na rozhraní dielektrika a koule se objeví vázaný náboj $-Q_p$, jehož pole se skládá s polem volného náboje $+Q$ na vodivé kouli.

Pole volného náboje bude zeslabeno. Intenzita elektrostatického pole v bodě určeném $\vec{r}$ bude

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q - Q_p}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.91)$$

Podle (1.90) je intenzita pole v dielektriku

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.92)$$

Porovnáním obou rovnic dostaneme pro účinný náboj

$$Q - Q_p = \frac{Q}{\epsilon_r} \quad (1.93)$$

Účinný náboj v homogenním, izotropním dielektriku je ε_r - krát menší než volný náboj Q .
Coulombův zákon pro dielektrikum:

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{QQ_0}{r^2} \vec{r}_0 \quad (1.94)$$

je tedy nutné uvažovat účinný náboj, který je ε_r - krát menší než volný náboj Q .

Veličina $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ **permitivita prostředí** (rozměr $C^{-2} \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$) (1.95)

6. Zobecněná Gaussova věta. Vektor elektrické indukce

Uvažujme vodivé těleso v dielektriku, nabitě volným nábojem Q . Dojde k polarizaci dielektrika a uzavřenou plochou S projde náboj

$$Q_p = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} . \quad (1.96)$$

Uvnitř uzavřené plochy bude vázaný náboj $-Q_p$. **Celkový náboj** (volný i vázaný) uvnitř plochy S bude $Q - Q_p$

a Gaussovu větu (1.34) je nutno přepsat ve tvaru

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q - Q_p) . \quad (1.97)$$

Po vynásobení této rovnice ε_0 a dosazením do (1.96) dostaneme

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

a po úpravě $\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = Q . \quad (1.98)$

Na pravé straně je **celkový volný náboj** Q (uvnitř plochy S)

Na levé straně rovnice v závorce je **vektor elektrické indukce**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} . \quad (1.99)$$

Vztah platí i pro nehomogenní, případně anizotropní dielektrika

Pro lineární dielektrika

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \kappa_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} ,$$

tedy $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} . \quad (1.100)$

Obdobným způsobem jako byly zavedeny elektrické siločáry a tok intenzity plochou

definujeme **elektrické indukční čáry** a **tok vektoru elektrické indukce Φ_d plochou S** (elektrický indukční tok)

$$\Phi_d = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} . \quad (1.101)$$

Zobecněná Gaussova věta v integrálním tvaru – dosazení (1.99) do (1.98)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q . \quad (1.102)$$

Tok vektoru elektrické indukce libovolnou uzavřenou plochou S je roven celkovému náboji Q , který je touto plochou obklopen.

Diferenciální tvar zobecněné Gaussovy věty

$$\text{div } \vec{D} = \rho , \quad (1.103)$$

kde ρ je hustota volného náboje v daném místě.

Poznámka:

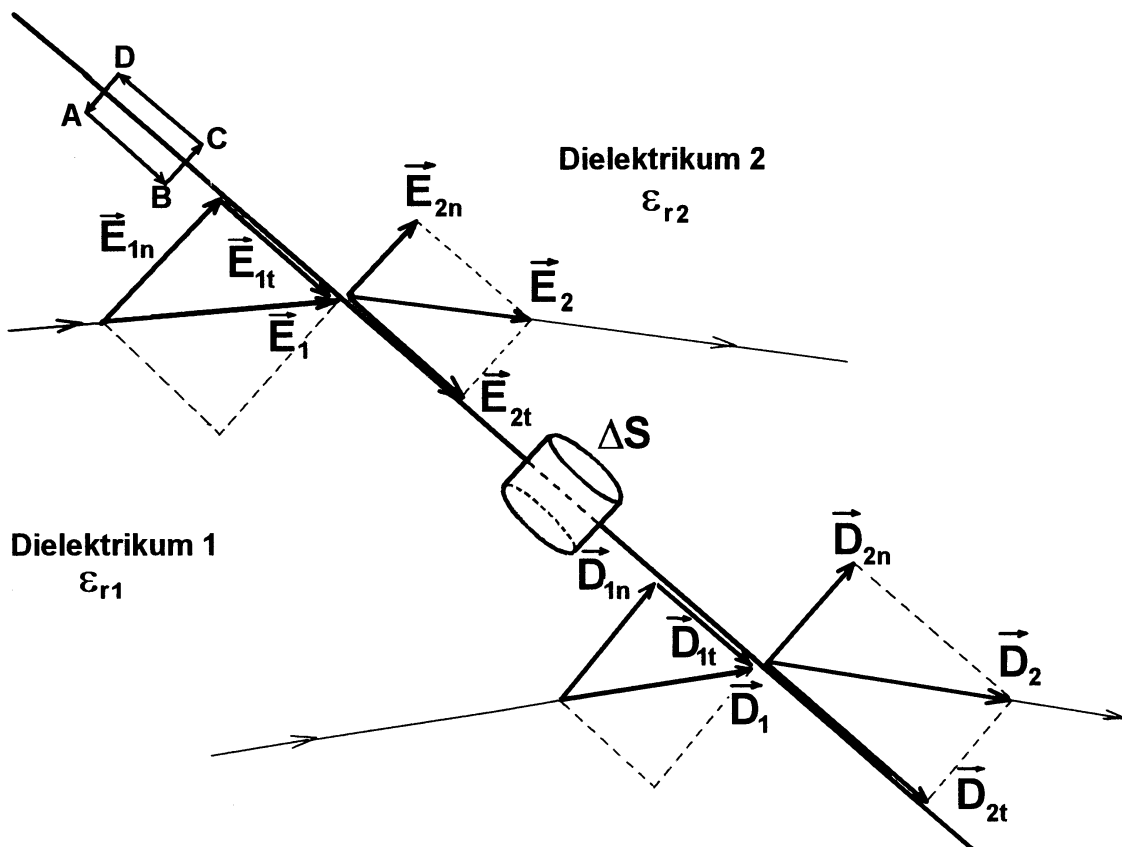
Zobecněná Gaussova věta platí nejen pro děje elektrostatické, ale i pro periodicky nebo neperiodicky proměnná elektrická pole a je proto jednou ze základních rovnic elektromagnetického pole.

7. Elektrostatické pole na rozhraní dvou dielektrik

Uvažujme rozhraní dvou dielektrik charakterizovaných $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}$.

V obecném případě musíme vektory charakterizující pole rozložit na složky E_n, D_n a E_t, D_t .

Zkoumejme, jak se tyto složky mění na rozhraní (viz. obr. 1.32)



Obr. 1.32.

Tečné složky:

v blízkosti rozhraní uzavřená dráha tvaru obdélníka ABCD.

Platí
$$\oint_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Rozepsaný integrál podle jednotlivých úseků uzavřené dráhy

$$\int_A^B E_{1t} dl + \int_B^C E_n dl - \int_C^D E_{2t} dl - \int_D^A E_n dl = 0.$$

Pro případ situace v těsné blízkosti rozhraní ($BC \rightarrow 0$, $DA \rightarrow 0$) se 2. a 4. integrál blíží k nule

$$\int_A^B E_{1t} dl - \int_C^D E_{2t} dl = 0.$$

Pro $AB = CD$ vyplývá

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1.104)$$

Velikost tečné složky intenzity elektrostatického pole se na rozhraní dvou dielektrik nemění.

Podle (1.100) můžeme tečné složky intenzity vyjádřit pomocí tečných složek elektrické indukce

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2}} \text{ a po úpravě } \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \quad (1.105)$$

Velikost tečné složky vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik změní v poměru relativních permitivit.

Pro normálové složky volíme válcovou plochu orientovanou kolmo k rozhraní (základny ΔS zasahují do obou dielektrik).

Podle Gaussovy zobecněné věty

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Integrál rozepíšeme (tok základnami a tok plochou pláště)

$$-\int_{\Delta S} D_{1n} dS + \int_{S_{pl}} D dS + \int_{\Delta S} D_{2n} dS = 0.$$

- U prvního integrálu - znamená vstup indukčních čar dovnitř plochy,
- velikost $S_{pl} \rightarrow 0$ (druhý integrál se blíží nule).

Po úpravě

$$-\int_{\Delta S} D_{1n} dS + \int_{\Delta S} D_{2n} dS = 0.$$

$$\text{odtud} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad (1.106)$$

Velikost normálové složky vektoru elektrické indukce se na rozhraní dvou dielektrik nemění.

Vyjádření normálové složky vektoru $\vec{E}_n$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{2n}$$

a odtud

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}. \quad (1.107)$$

Velikost normálové složky vektoru elektrické intenzity se na rozhraní dvou dielektrik mění skokem a to v obráceném poměru elektrických permitivit.

Poznámka:

V případě, kdy elektrické pole není kolmé k rozhraní dvou dielektrik, dochází k lomu elektrických siločar i elektrických indukčních čar (obr. 1.32 pro případ $\varepsilon_{r1} < \varepsilon_{r2}$).

8. Anizotropní a nelineární dielektrika

V lineárním izotropním dielektriku je vektor polarizace $\vec{P}$ přímo úměrný intenzitě $\vec{E}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa_e \vec{E}, \quad (1.108)$$

kde elektrická susceptibilita κ_e nezávisí na intenzitě $\vec{E}$. Vektory $\vec{P}$, $\vec{E}$ a $\vec{D}$ mají proto v lineárním dielektriku stejný směr.

Neizotropní dielektrikum:

závislost $\vec{P}$ na $\vec{E}$ se vyjadřuje složitěji. V libovolné soustavě x, y, z :

$$\begin{aligned}P_x &= \varepsilon_0 \kappa_{11} E_x + \varepsilon_0 \kappa_{12} E_y + \varepsilon_0 \kappa_{13} E_z \\P_y &= \varepsilon_0 \kappa_{21} E_x + \varepsilon_0 \kappa_{22} E_y + \varepsilon_0 \kappa_{23} E_z, \\P_z &= \varepsilon_0 \kappa_{31} E_x + \varepsilon_0 \kappa_{32} E_y + \varepsilon_0 \kappa_{33} E_z\end{aligned}$$

kde P_x, P_y, P_z a E_x, E_y, E_z jsou velikosti vektorů $\vec{P}, \vec{E}$ a koeficienty $\kappa_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) se nazývají elektrické susceptibility.

Z 9 koeficientů je 6 nezávislých protože platí

$$\kappa_{ij} = \kappa_{ji}.$$

Poznámka:

- Pouze v triklinické krystalografické soustavě budou všechny elektrické susceptibility různé od nuly.
- Počet elektrických susceptibilit různých od nuly se bude zmenšovat s rostoucí symetrií krystalu.

Elektrické susceptibility jsou *složkami symetrického tenzoru*.

Lze nalézt soustavu souřadných os, kde se všechny nediagonální složky $\kappa_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) pro $i \neq j$ rovnají nule. Tyto osy se nazývají *hlavní osy*.

Potom

$$P_x = \varepsilon_0 \kappa_1 E_x, P_y = \varepsilon_0 \kappa_2 E_y, P_z = \varepsilon_0 \kappa_3 E_z,$$

kde $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ se nazývají *hlavními susceptibilitami*

Obdobně lze v anizotropním dielektriku vyjádřit velikosti složek vektoru elektrické indukce $\vec{D}$ rovnicemi

$$\begin{aligned}D_x &= \varepsilon_0 \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_0 \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_0 \varepsilon_{13} E_z \\D_y &= \varepsilon_0 \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_0 \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_0 \varepsilon_{23} E_z \\D_z &= \varepsilon_0 \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_0 \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_0 \varepsilon_{33} E_z\end{aligned}$$

kde $\varepsilon_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) jsou složky *dielektrického tenzoru*.

Vektory $\vec{E}, \vec{P}, \vec{D}$ v anizotropních dielektrikách *nejsou rovnoběžné* (mají různé směry).

Pro technické aplikace jsou významné krystalické látky s $\varepsilon_r = 10^3 - 10^4$ – *feroelektrické látky* tzv. seignetoelektrické – *Seignettova sůl* (vínan sodno-draselno-amonný $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), *kyselý fosforečnan draselný* (KH_2PO_4) a jemu příbuzné látky.

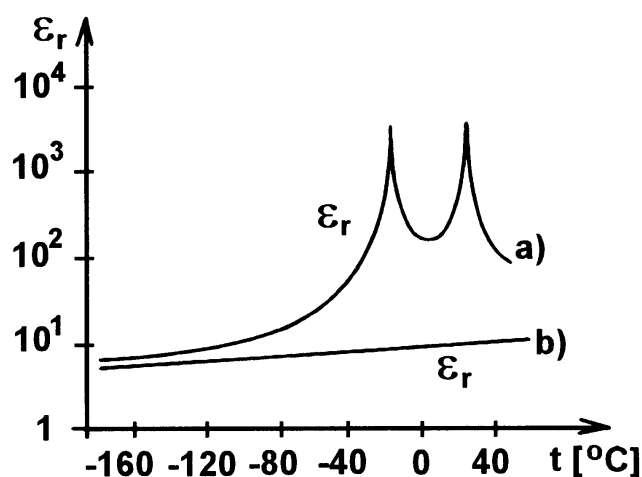
Pro výrobu kondenzátorů, v elektrooptických a elektronických zařízeních má význam *barium titaničitá keramika* (BaTiO_3).

Feroelektrické látky se vyznačují *doménovou strukturou* (oblasti s rovnoběžnými elementárními dipólovými momenty) – *spontánně polarizované*. Působením vnějšího pole se domény orientují do směru pole (proto velké hodnoty ε_r).

Vlastnosti některých feroelektrických látek

- *Nelineární* závislost $\vec{P}$ na $\vec{E}$ – tzv. *hystereze* (zpoždění),
- závislost ε_r na směru, teplotě a kmitočtu (obr. 1.32),
- působením elektrického pole na iontové krystaly dochází při polarizaci k *deformaci krystalové mřížky*.

Elektrostrikce – *obrácený piezoelektrický jev* (použití u generátorů ultrazvuku a krystalových elektronických oscilátorech).

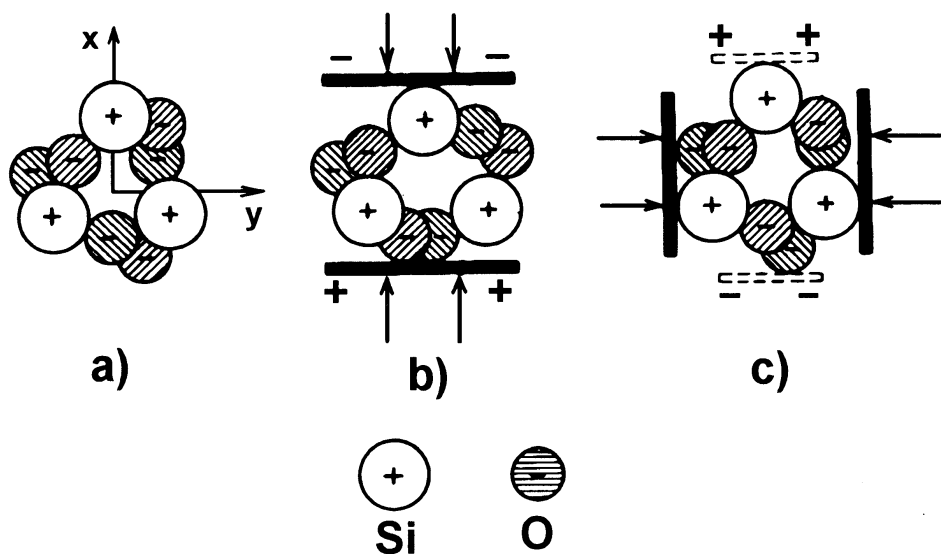


Obr. 1.33.

Vlastní piezoelektrický jev (obr. 1.34)

mechanickým namáháním krystalu (tah, tlak, ohyb, apod.) se objeví mezi deformovanými plochami elektrické napětí.

Projevuje se u látek s elektricky nesymetrickou krystalovou buňkou (např. *barium-titanová keramika*, *křemen* $-\text{SiO}_2$)



Obr. 1.34.

1. 10. ENERGIE SOUSTAVY NÁBOJŮ A ELEKTROSTATICKÉHO POLE

Potenciální energie náboje Q v bodě M

$$W_{PM} = Q\varphi_M.$$

Při buzení pole soustavou nábojů v klidu je tato energie jen částí celkové potenciální energie.

a) Energie soustavy bodových nábojů

Pro dvojici bodových nábojů Q_1 a Q_2 ve vzdálenosti r_{12} od sebe

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_{12}}.$$

a potenciální energie náboje Q_2 v tomto místě je

$$W_{p2} = Q_2 \varphi_2 = Q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_{12}}. \quad (1.109)$$

stejnou energii bude mít náboj Q_1 v poli náboje Q_2

$$W_{p1} = Q_1 \varphi_1 = Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_{21}}. \quad (1.110)$$

Celková energie soustavy dvou bodových nábojů

$$W_p = \frac{1}{2} (W_{p1} + W_{p2}). \quad (1.111)$$

Zobecnění pro soustavu n nábojů

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_{pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i, \quad (1.112)$$

kde φ_i je potenciál elektrostatického pole v místě náboje Q_i .

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{Q_j}{r_{ji}}.$$

b) Energie osamocené nabitý vodič

Představa postupného nabíjení vodiče po množstvích dq do konečné hodnoty Q .

Je-li vodič nabit nábojem q , je potenciál na jeho povrchu $\varphi_s = \frac{q}{C}$, kde C je kapacita vodiče.

Práce vykonaná vnější silou při přemístění dq z nekonečna na jeho povrch

$$dA = \varphi_s dq = \frac{q}{C} dq,$$

která se projeví přírůstkem energie $dW = dA$. Celková práce na nabití vodiče nábojem Q je rovna součtu elementárních prací, čili

$$A = W_p = \int_0^Q dA = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Analogicky lze vztah vyjádřit v různých tvarech

$$W_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \varphi_s^2 = \frac{1}{2} Q \varphi_s. \quad (1.113)$$

c) Energie nabitýho kondenzátoru

Použití předchozího postupu – náboj dq je postupně přenášen z jedné desky na druhou.

Je-li kondenzátor nabit nábojem q , je mezi elektrodami napětí $U = \frac{q}{C}$ a vnější síla vykoná práci

$$dA = dqU = \frac{1}{C} q dq.$$

Celková práce na nabití kondenzátoru nábojem Q je rovna jeho energii (energii jeho pole)

$$A = W_p = \int_0^Q dA = \frac{1}{2} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C},$$

analogicky

$$W_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU. \quad (1.114)$$

Poznámka:

Za nositele energie můžeme spíše pokládat elektrostatické pole, než samotné náboje.

d) Energie elektrostatického pole

Vyjádření energie elektrického pole pomocí vektorů pole.

Potenciální energie nábojů na elektrodách kondenzátoru

$$W_p = \frac{1}{2} CU^2.$$

souvisí s existencí pole o stejné energie

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2.$$

Uvažujme pro jednoduchost nabitý deskový kondenzátor s homogenním polem

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \quad \text{a} \quad U^2 = E^2 d^2.$$

dostaneme

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} E \epsilon_0 \epsilon_r E S d.$$

Součin $Sd = V$ – objem pole v kondenzátoru a $\epsilon_0 \epsilon_r E = D$

Takže

$$W_e = \frac{1}{2} EDV. \quad (1.115)$$

V případě anizotropního prostředí, kdy $\vec{E}$ a $\vec{D}$ nemají stejný směr

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} V. \quad (1.116)$$

Veličina

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (1.117)$$

se nazývá **hustota energie** elektrostatického pole.

Známe-li závislost hustoty energie $w_e(x, y, z)$ na poloze, můžeme celkovou hodnotu energie elektrostatického pole stanovit

$$W_e = \int_V w_e dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV. \quad (1.118)$$

Poznámka:

K vytvoření elektrostatického pole je nutno oddělit od sebe kladné a záporné náboje a dosáhnout převahy kladných nábojů na jednom tělese a převahy záporných na jiném tělese. Přitom je třeba překonávat přitažlivé síly mezi souhlasnými náboji a vykonaná práce se projeví jako energie elektrostatického pole.

Zařízení, kterými toho dosahujeme se nazývají **elektrostatické zdroje** nebo **generátory** (např. Van de Graafův generátor).

2. STACIONÁRNÍ ELEKTRICKÉ POLE – USTÁLENÝ ELEKTRICKÝ PROUD

2.1. VZNIK A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ELEKTRICKÉHO PROUDU

1. Elektrický proud a jeho druhy

Uvažujeme jevy související s *uspořádaným pohybem* elektrického náboje.

Uspořádaný pohyb elektricky nabitých částic nazýváme *elektrickým proudem*.

Tři druhy elektrického proudu:

a) *Kondukční proud*

Vzniká působením elektrického pole ve vodiči na *nositele náboje*.

Podmínka vzniku kondukčního proudu: $\vec{E} \neq 0$.

K udržení pole ve vodiči – nutnost *zdroje elektromotorického napětí*.

Významný účinek kondukčního proudu – vznik *Joulova tepla*.

b) *Konvekční proud*

Vzniká při pohybu nabitého makroskopického tělesa (např. nabitě kuličky, pásu Van de Graafova generátoru apod.)

Konvekční proud nemá tepelné účinky.

c) *Posuvný proud*

Vzniká v dielektriku při časové změně polarizace dielektrika.

2. Základní charakteristiky elektrického proudu

Fyzikální veličina *elektrický proud (proud)* – zavedení.

Uvažujeme orientovanou plochu S , kterou procházejí náboje.

Předpokládáme, že za Δt projde v kladném směru ΔQ_{kl} a v záporném směru $-\Delta Q_{zap}$

Celkový náboj ΔQ za čas Δt orientovanou plochou S

$$\Delta Q = \Delta Q_{kl} - (-\Delta Q_{zap}) = \Delta Q_{kl} + \Delta Q_{zap}.$$

Průměrný proud

$$I_p = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Okamžitý proud

pro $\Delta t \rightarrow 0$

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.2)$$

Proud I je skalární veličina (může být kladný nebo záporný)

Pro případ *ustáleného (stacionárního)* proudu je $I_p = I$

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (2.3)$$

V soustavě SI je jednotkou proudu **1 ampér (A)** – základní jednotka definovaná na základě magnetických účinků elektrického proudu.

Poznámky:

- Ze vztahu (2.3) vyplývá odvozená jednotka Coulomb.
- Ve vodiči s ustáleným proudem jsou náboje obou znamének rovnoměrně rozložené a elektrické pole v okolí vodičů s proudem můžeme zanedbat. Vlivem pohybu nabitých částic vzniká v okolí vodičů s proudem *pole magnetické*.
- **Směr proudu** je historicky zaveden jako směr pohybu kladných nositelů nábojů (tj. od místa s vyšším potenciálem k místu s nižším potenciálem).

- V případě ustáleného proudu prochází průřezem vodiče **velký náboj** Q i při **malém napětí**, které na vodiči udržuje zdroj (v elektrostatice se nabil vodič na velký potenciál i velmi malým nábojem). **Měřicí přístroje** pro měření ustáleného proudu jsou založeny na jiném principu (magnetické účinky proudu) než elektrostatické přístroje.

3. Hustota proudu

Vystihuje na rozdíl od I rozložení proudu po ploše S .

Zavádí se vektorová veličina $\vec{J}$ **hustota proudu**.

Zvolíme v libovolném místě orientované plochy S elementární plošku dS jejíž vektor

$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$. Proud touto ploškou je dI .

Pro hustotu proudu $\vec{J}$ platí:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} = J dS \cos \alpha, \quad (2.4)$$

kde α je úhel mezi vektory $d\vec{S}$ a $\vec{J}$.

Pro velikost hustoty proudu vyplývá

$$J = \frac{dI}{dS \cos \alpha} = \frac{|dI|}{dS_{\perp}}, \quad (2.5)$$

kde $dS_{\perp} = |dS \cos \alpha|$ je velikost průmětu elementární plošky dS do roviny kolmé k $\vec{J}$.

Velikost hustoty proudu je číselně rovna velikosti proudu procházejícího kolmou plochou jednotkové velikosti. Jednotkou je $A \cdot m^{-2}$.

Souvislost hustoty proudu s veličinami charakterizujícími uspořádaný pohyb nositelů proudu

Rozložení náboje s objemovou hustotou náboje $\rho_+ = n_0 q_0$, procházející plochou dS rychlostí $\vec{v}_+$.

Za dobu dt projdou všechny náboje ploškou dS z objemu $dV = v_+ dt dS_{\perp}$ ($dQ = \rho_+ v_+ dt dS_{\perp}$)

Proud dI ploškou dS podle (2.3)

$$dI = \frac{dQ}{dt} = \rho_+ v_+ dS_{\perp} = \rho_+ v_+ \cdot d\vec{S}.$$

Porovnáním s rovnicí (2.5) dostaneme pro $\vec{J}$

$$\vec{J}_+ = \rho_+ \vec{v}_+ = n_0 q_0 \vec{v}_+.$$

obdobnou úvahou pro záporně nabitě částice

$$dI = \rho_- \vec{v}_- \cdot d\vec{S}.$$

a pro hustotu proudu $\vec{J}_- = \rho_- \vec{v}_- = -n_0 q_0 \vec{v}_-.$

Vektor $\vec{J}_- = \rho_- \vec{v}_-$ má stejnou orientaci jako $\vec{J}_+.$

Z toho plyne: **vektor hustoty proudu má vždy souhlasnou orientaci jako vektor rychlosti kladných nositelů proudu.**

Bude-li proud dI způsoben současně pohybem $+$ a $-$ nábojů potom

$$\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_- = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-. \quad (2.6)$$

Známe-li hustotu proudu jako funkci místa na uvažované ploše, pak prou I orientovanou plochou S

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (2.7)$$

Proud I je tokem vektoru hustoty proudu $\vec{J}$ orientovanou plochou S .

Pro $\vec{J} = \text{konst.}$ a S je rovinná, pak

$$I = J S \cos \alpha. \quad (2.8)$$

V každém bodě prostoru, kterým prochází elektrický proud lze stanovit vektor $\vec{J}$ a hovoříme o **proudovém poli**.

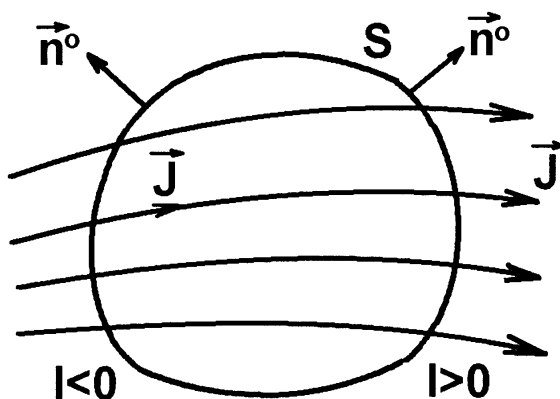
Proudové čáry – vektorové čáry tohoto pole.

Proudová trubice – svazek proudových čar.

4. Rovnice kontinuity (spojitosti) proudu

Při stacionárním proudu se nositelé proudu nemohou nikde hromadit ani ztrácet – proudové čáry jsou uzavřené křivky (uzavírají se přes zdroj EMN).

Uzavřená orientovaná **plocha** v proudovém poli (obr. 2.1)



Obr. 2.1.

Jednotkový vektor normály $\vec{n}_0$ orientujeme ve smyslu vnější normály.

V místech, kde proudové čáry vstupují dovnitř uzavřené plochy $\vec{J}$ svírá s $\vec{n}_0$ úhel $\alpha > 90^\circ$ (+ proud),

v místech kde vystupují z uzavřené plochy $\vec{J}$ svírá s $\vec{n}_0$ úhel $\alpha < 90^\circ$ (– proud),

celkový proud libovolnou uzavřenou plochou je roven 0,

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.9)$$

což je **Rovnice kontinuity stacionárního proudu**.

Pomocí Gaussovy (matematické) věty

$$\int_V \text{div} \vec{J} dV = 0 \text{ odtud } \text{div} \vec{J} = 0. \quad (2.10)$$

rovnice kontinuity stacionárního proudu v diferenciálním tvaru

Uvažujme jediný vodič v izolujícím prostředí. Jeho dvěma kolmými průřezy S_1 a S_2 proložíme uzavřenou orientovanou plochu S (obr. 2.2). S_1 proud vstupuje, S_2 proud vystupuje (jinde je proud roven nule – izolant).

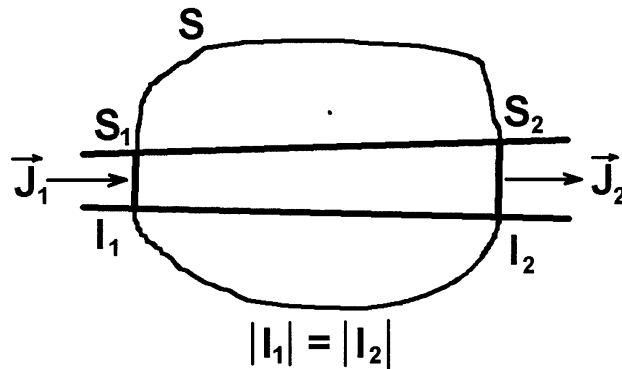
Podle rovnice kontinuity platí

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Podle (2.7) vyjadřuje integrál přes S_1 proud $I_1 < 0$ průřezem vodiče S_1 a integrál přes S_2 proud $I_2 > 0$ průřezem vodiče S_2 .

tedy $I_1 + I_2 = 0$, nebo $-|I_1| + |I_2| = 0$ a tedy $|I_1| = |I_2|$.

při ustáleném proudu protéká každým průřezem vodiče proud stejné velikosti.



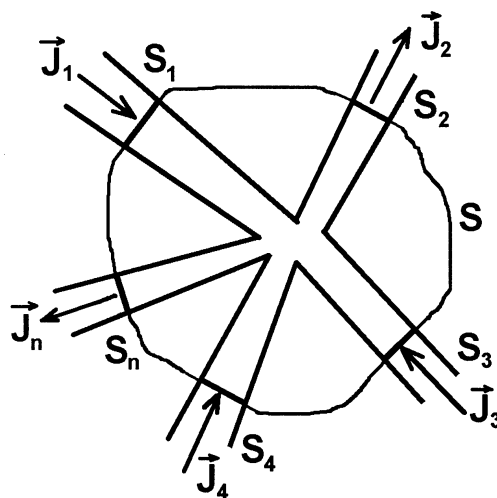
Obr. 2.2.

Z rovnice kontinuity odvodíme

5. První Kirchhoffův zákon

V určitém místě je vodič spojeno n vodičů ($n \geq 3$) – *uzel*.

$S_1, S_2, \dots, S_n$ kolmé průřezy vodičů stýkajících se v uzlu a proložíme jimi libovolnou uzavřenou plochu S (obr.2.3)



Obr. 2.3.

Vodiči procházejí proudy $I_1, I_2, \dots, I_n$.

Hustota proudu je nenulová jen ve vodičích – v rovnici kontinuity $I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ se integrál

redukuje na součet integrálů přes její části $S_1, S_2, \dots, S_n$.

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J}_2 d\vec{S} + \dots + \int_{S_n} \vec{J}_n d\vec{S} = 0.$$

což lze stručně vyjádřit

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0. \quad (2.11)$$

První Kirchhoffův zákon: součet všech proudů stýkajících se v uzlu je roven nule.

S přihlédnutím k vzájemné orientaci vektoru hustoty proudu $\vec{J}$ a vektoru elementu plochy $d\vec{S}$ můžeme proudy vyjádřit pomocí velikostí proudů a dostáváme

$$-|I_1| + |I_2| - |I_3| - |I_4| + |I_n| = 0,$$

tedy proudy přitékající do uzlu jsou záporné, proudy odtékající z uzlu jsou kladné.

2.2 OHMŮV ZÁKON A JEHO APLIKACE

1. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru pro homogenní vodič.

Zdroj napětí U vytváří pole $\vec{E}_{st}$.

Na volné elektrony s nábojem $q_0 = -e$ působí pole ve vodiči $\vec{F} = -e\vec{E}_{st}$.

Působením této síly získá elektron rychlost $\vec{v}$. (pohyb je bržděn ionty krystalové mřížky). Srážkami částic volných a vázaných vzrůstá vnitřní energie – vodič se zahřívá.

Makroskopicky můžeme nerovnoměrný pohyb elektronů nahradit pohybem rovnoměrným s průměrnou rychlostí $\vec{v}_p$.

Pro **lineární vodiče** je tato průměrná rychlost přímo úměrná $\vec{E}_{st}$.

$$\vec{v}_p = -k_e \vec{E}_{st},$$

kde konstanta k_e se nazývá **pohyblivost** volných elektronů v daném vodivém prostředí.

Počet volných elektronů v kovu n_0 ($n_0 \approx 10^{28}$ v m^3) je rozložen v objemové jednotce s

$$\rho_- = -en_0,$$

hustota proudu ve vodiči je pak

$$\vec{J} = \rho_- \vec{v}_p = (-en_0)(-k_e \vec{E}_{st}) = en_0 k_e \vec{E}_{st}.$$

Veličina $\gamma = en_0 k_e$ závisí na materiálu vodiče a jeho fyzikálním stavu a nazývá se **měrná vodivost (konduktivita)**.

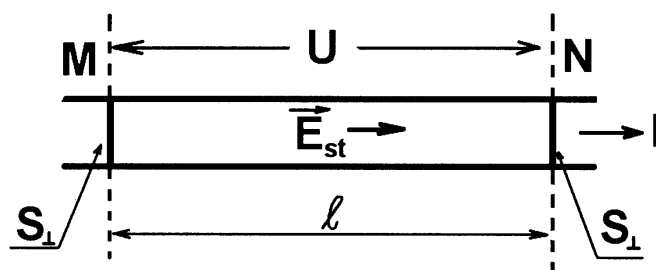
$$\vec{J} = \gamma \vec{E}_{st}. \quad (2.12)$$

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru (v daném místě lineárního vodiče je hustota proudu $\vec{J}$ přímo úměrná intenzitě $\vec{E}_{st}$ elektrického pole v tomto místě.

Závisí-li měrná vodivost na intenzitě, pak hustota proudu není přímo úměrná intenzitě $\vec{E}_{st}$ a takové vodiče nazýváme **nelineární**.

2. Ohmův zákon (v integrálním tvaru) pro úsek homogenního vodiče.

V elektrickém obvodu se stacionárním proudem uvažujeme úsek vodiče mezi body M a N (neprocházející zdrojem) – viz. obr. 2.4.



Obr. 2.4.

Uvažujme konstantní průřez $S_{\perp}$. Mezi body M a N zdroj udržuje konstantní rozdíl potenciálů $\varphi_M - \varphi_N = U$, je-li ve vodiči $\vec{E}_{st} = \text{konst.}$ pro napětí platí

$$U = \int_M^N \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{st} \int_M^N dl = E_{st} l.$$

Odtud vyjádříme

$$E_{st} = \frac{U}{l}.$$

velikost hustoty proudu ve vodiči

$$J = \frac{I}{S_{\perp}}.$$

Výrazy pro E_{st} a J dosadíme do Ohmova zákona v diferenciálním tvaru a obdržíme

$$\frac{I}{S_{\perp}} = \gamma \frac{U}{l}.$$

Odtud po úpravě

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\gamma S_{\perp}} l} = \frac{U}{R}, \quad (2.13)$$

kde

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S_{\perp}} = \rho \frac{l}{S_{\perp}}. \quad (2.14)$$

je **elektrický odpor** uvažovaného úseku vodiče,

veličina $\rho = \frac{1}{\gamma}$ je **měrný odpor** materiálu vodiče.

Vztah (2.13) je **Ohmův zákon pro úsek homogenního vodiče**.

Pro $R = \text{konst.}$ (**lineární vodič**) je proud I **přímo úměrný** napětí U na tomto vodiči.

Jednotka odporu v SI soustavě je **ohm** (Ω). Ohm je odpor vodiče, jímž prochází proud 1 A, je-li mezi konci tohoto vodiče napětí 1 V.

Převrácená hodnota odporu R je **elektrická vodivost** G , tj.

$$G = \frac{1}{R}.$$

Jednotkou vodivosti je jeden **siemens** (S). Platí $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = \text{A} \cdot \text{V}^{-1}$.

Ekvivalentní tvar Ohmova zákona (2.13), zapsaného pomocí elektrické vodivosti je

$$I = GU \quad \text{nebo} \quad U = \frac{I}{G}.$$

Jednotka měrného odporu ρ v SI jednotkách je $\Omega \cdot \text{m}$ (ohmmetr).

Měrný odpor závisí na druhu materiálu vodiče a na jeho fyzikálním stavu (teplotě).

Typické hodnoty měrného odporu:

- $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ až $10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ – kovy,
- $10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ až $10^7 \Omega \cdot \text{m}$ – polovodiče,
- $10^8 \Omega \cdot \text{m}$ až $10^{19} \Omega \cdot \text{m}$ – izolanty.

Hodnoty ovlivňují příměsi, mechanické a tepelné zpracování.

Poznámka: v technické praxi se obvykle průřez vodiče vyjadřuje v mm^2 a délka v m, proto se používá jednotka měrného odporu $\Omega \cdot \text{mm}^2 \cdot \text{m}^{-1}$

3. Práce a výkon stacionárního elektrického proudu

Práce při přemístění náboje Q z místa o různých potenciálech

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) = QU.$$

Uvedený vztah platí i pro stacionární elektrické pole $\vec{E}_{st}$, které ve vodiči vyvolává ustálený proud.

$$A = QU = UIt,$$

což lze vyjádřit pomocí Ohmova zákona

$$A = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t. \quad (2.15)$$

Výkon elektrického proudu ve vodiči je

$$P = \frac{A}{t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (2.16)$$

Jednotka výkonu v SI soustavě je **watt** (W); $1 \text{ W} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} = \text{V} \cdot \text{A}$. (v praxi μW , mW , kW , MW , GW).

Jednotka práce v SI soustavě je **joule** (J). Při odběru se často vyjadřuje součinem výkonu $P \cdot t$.

Proto se práce vyjadřuje ve **wattsekundách** (W.s) nebo násobcích (kW.s, W.h, kW.h apod.).

Průchodem proudu vodičem se vodič zahřívá.

Vzniklé (Jouleovo) teplo ve vodiči

$$Q_j = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t. \quad (2.17)$$

tento vztah se nazývá **Joulův zákon**. (Objevil jej v roce 1844 anglický fyzik J.P. Joule).

Poznámka:

Pozitivní praktický význam – ohřev v odporových pecích, topení, sušení apod., rozžhavená vlákna žárovek jako zdroj světla.

Negativní důsledky – ztráty elektrické energie. Nutnost zajištění odvodu tepla u různých elektrických spotřebičů. Spotřebiče chráníme např. *tavnými pojistkami*.

4. Závislost odporu na teplotě

Odpor všech vodivých látek závisí na teplotě.

Pro kovy a většinu vodivých látek platí závislost

$$R_T = R_{T_0} e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}, \quad (2.18)$$

kde R_T je odpor vodiče při teplotě T ,

R_{T_0} odpor při teplotě T_0 ,

B je konstanta materiálu vodiče, která má rozměr teploty (pro kovy je záporná, pro polovodiče kladná).

Závislost odporu vodiče na teplotě charakterizujeme tzv. *teplotním součinitelem odporu* α_T , který se číselně rovná změně odporu 1 Ω při změně teploty o 1 K, tedy

$$\alpha_T = \frac{1}{R_T} \frac{dR_T}{dT}. \quad (2.19)$$

Rozměr teplotního součinitele odporu α_T je K^{-1} .

Stanovení souvislosti α_T s konstantou B

Provedeme derivaci odporu R_T podle T

$$\frac{dR_T}{dT} = R_{T_0} e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \left(-\frac{B}{T^2} \right) = R_T \left(-\frac{B}{T^2} \right).$$

Dosazením do (2.19)
$$\alpha_T = -\frac{B}{T^2}. \quad (2.20)$$

Pro řadu vodičů je konstanta B malá a můžeme proto vztah (2.18) zjednodušit, pokud rozdíl $(T - T_0)$ není příliš velký.

Rozvoj mocniny ve vztahu (2.18) podle vzorce

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

tedy
$$R_T = R_{T_0} \left[1 + B \frac{T_0 - T}{TT_0} + \dots \right] = R_{T_0} \left[1 - B \frac{T - T_0}{TT_0} + \dots \right].$$

Pokud se T příliš neliší od T_0 můžeme se v rozvoji omezit na první dva členy a označit součin $TT_0 \approx T_0^2$. Potom

$$-\frac{B}{T_0^2} = \alpha_{T_0}$$

a po dosazení do předchozího výrazu dostaneme pro odpor vodiče

$$R_T = R_{T_0} [1 + \alpha_{T_0} (T - T_0)]. \quad (2.21)$$

Rozdíl je stejný v absolutní i Celsiově teplotní stupnici.

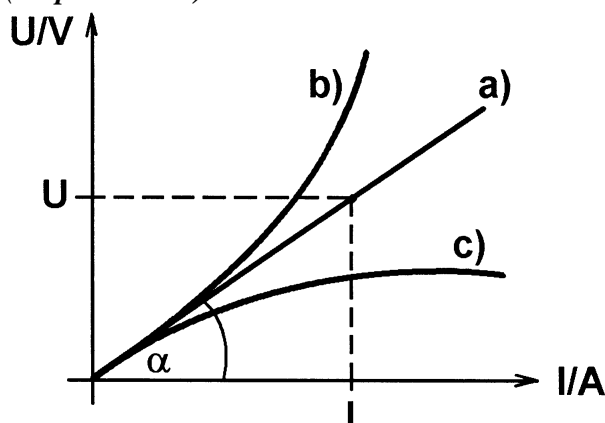
Obdobná závislost platí i pro měrný odpor

$$\rho_t = \rho_{t_0} [1 + \alpha_{t_0} (t - t_0)]. \quad (2.22)$$

Pro kovy je teplotní součinitel odporu kladný ($10^{-3} K^{-1}$) – odpor kovového vodiče s teplotou roste.

Pro uhlík, elektrolyty a polovodiče $\alpha_{T_0} < 0$, tj. odpor s rostoucí teplotou se zmenšuje.

Grafické vyjádření závislosti napětí U na proudu I procházejícího vodičem (resp. I na U) se nazývá **voltampérová (ampérvoltová) charakteristika** daného vodiče.



Obr. 2.5.

Pro lineární vodič ($R = \text{konst.}$) – přímka procházející počátkem (obr.2.5 a).

Směrnice $\text{tg} \alpha = \frac{U}{I} = R$ se rovná odporu R daného vodiče.

Pro nelineární vodiče ($R \neq \text{konst.}$) je závislost U na I složitější funkcí $U = f(I)$ a voltampérovou charakteristika je určitá křivka (obr. 2.5 b) a c)) – určujeme měřením.

Nelinearita může být způsobena vnitřní stavbou látky, odpor může záviset i na směru proudu ve vodiči.

Supravodivost

Při jisté **kritické teplotě** T_K se zmenší odpor vodiče téměř k nule.

1911 – H.Kammerling Onnes (holadský fyzik) proved pokus na rtuti ($T_K = 4,2 \text{ K}$),

1933 – Meissner a Ochsenfeld ukázali **levitaci supravodiče** (vnější magnetické pole je "vytlačované" ze supravodiče a uvnitř je $B = 0$).

Důležitým parametrem je i **kritická magnetická indukce** B_K , která může narušit supravodivý stav.

Dělení supravodičů:

1. *Supravodiče 1. typu* – jedná se většinou o čisté kovy s jedinou hodnotou B_K jejíž hodnota je nízká (supravodivý stav je možné narušit slabým magnetickým polem).
2. *Supravodiče 2. typu* – dvě hodnoty B_K ($B_{K2} > B_{K1}$) Vhodné pro konstrukci supravodivých elektromagnetů a velmi silným magnetickým polem.
3. *Vysokoteplotní supravodiče* – keramické oxidy s T_K od 30 K do 135 K. ($\text{LN}_2 - 77 \text{ K}$).

Vysvětlení supravodivosti – kvantověmechanický popis systému elektronů ve vodiči (1957 – J. Bardeen, L. N. Cooper aj. R. Schriffer).

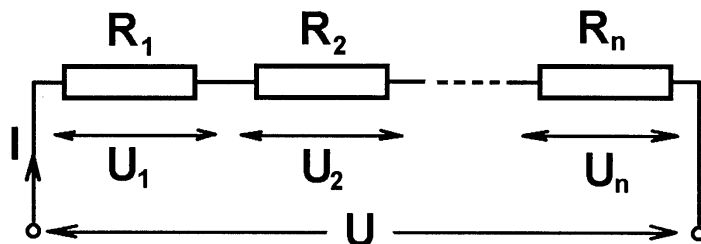
Dvojice elektronů s opačně orientovanými spiny si nevyměňují energii s ionty krystalové mřížky kovu a proto se v ní mohou pohybovat téměř bez odporu.

5. Spojování rezistorů

Rezistor – elektrotechnická součástka, jejíž hlavní parametr je elektrický odpor (drátové, vrstvé, hmotové apod.)

Dvě možnosti spojování *sériové (za sebou), paralelní (vedle sebe)*.

a) Sériové zapojení rezistorů (za sebou)



Obr. 2.6.

Rezistory o odporech $R_1, R_2, \dots, R_n$ spojené sériově – výstupní svorka je spojená se vstupní svorkou dalšího rezistoru ... (obr. 2.6) – po připojení rezistorů ke zdroji napětí U bude jimi procházet **stejný proud I** .

Napětí na jednotlivých rezistorech $U_1 = R_1 I, U_2 = R_2 I, U_n = R_n I$.

Sečtením dostaneme celkové napětí U

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I.$$

Pro celkový odpor platí

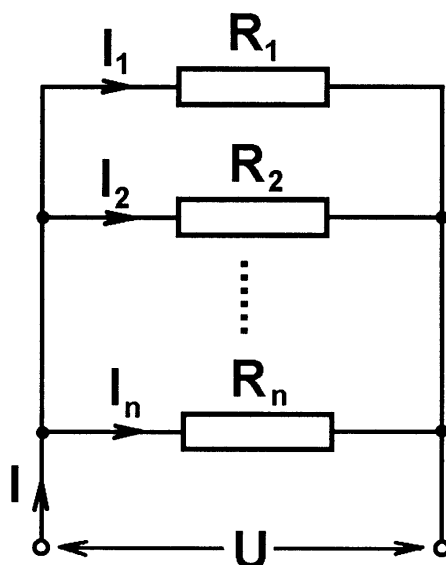
$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.23)$$

Dáme-li do poměru napětí na jednotlivých rezistorech, vyjde

$$U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n. \quad (2.24)$$

Celkové napětí se rozdělí na jednotlivé rezistory v přímém poměru k jejich odporům. Sériově řazené rezistory vytvářejí **dělič napětí**.

b) Paralelní zapojení rezistorů (vedle sebe)



Obr. 2.7.

Vstupní svorky jsou spojeny do uzlu 1, výstupní do uzlu 2 (obr. 2.7.) – na všech rezistorech je stejné napětí U , proudy stanovíme podle Ohmova zákona

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}.$$

Označíme-li R odpor celého obvodu mezi uzly 1 a 2, pak podle 1. Kirchhoffova zákona platí
 $-I + I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$.

Dosazením do této rovnice za jednotlivé proudy

$$I = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right).$$

Označíme-li R odpor celého obvodu mezi uzly 1 a 2, potom podle Ohmova zákona je vodivost rovna

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.25)$$

Tedy

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n. \quad (2.26)$$

Tedy výsledná vodivost je rovna součtu vodivostí jednotlivých rezistorů.

Pro poměr proudů

$$I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : \dots : G_n \quad (2.27)$$

6. Zdroj elektromotorického napětí. Ohmův zákon pro uzavřený obvod.

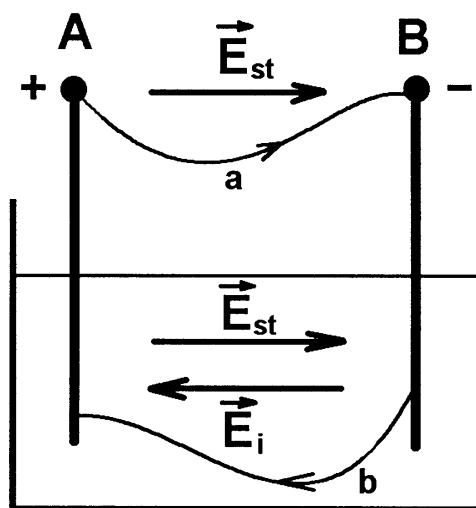
Zdroj EMN udržuje na vodičích připojeného obvodu konstantní rozdíl potenciálů – nenulová intenzita stacionárního elektrického pole $\vec{E}_{st}$.

Proudové čáry se uzavírají přes zdroj EMN.

Elektrické náboje se uvnitř zdroje přesouvají proti směru elektrických sil (*síly neelektrického původu* – mechanické, chemické apod. – tzv. *vtištěné síly*).

Intenzita vtištěných sil $\vec{E}_i$. Na udržení elektrického pole (elektrického proudu) zdroj EMN koná práci na úkor neelektrické energie (mechanické, chemické apod.)

Předpokládejme galvanický článek jako zdroj EMN (obr. 2.8)



Obr. 2.8.

a) Nezatížený zdroj EMN

Zdrojem neprochází proud. Kladná svorka (A) má vyšší potenciál, záporná svorka (B) nižší potenciál – mezi elektrodami je elektrické pole o intenzitě $\vec{E}_{st}$.

Elektrody jsou ponořené do vodivého prostředí (elektrolytu) – kdyby nepůsobily vtištěné síly, potenciály by se okamžitě vyrovnaly.

Intenzita vtištěných sil $\vec{E}_i$ je stejně velká, ale opačné orientace jako $\vec{E}_{st}$.

Výsledná intenzita uvnitř zdroje $\vec{E} = \vec{E}_{st} + \vec{E}_i = 0$.

Intenzita vně zdroje $\vec{E} = \vec{E}_{st}$.

Uvažujme nyní uzavřenou dráhu A-a-B-b-A z níž "a" probíhá vně zdroje mezi svorkami A a B, část "b" probíhá vnitřkem zdroje.

Cirkulace $\vec{E}$ po této dráze

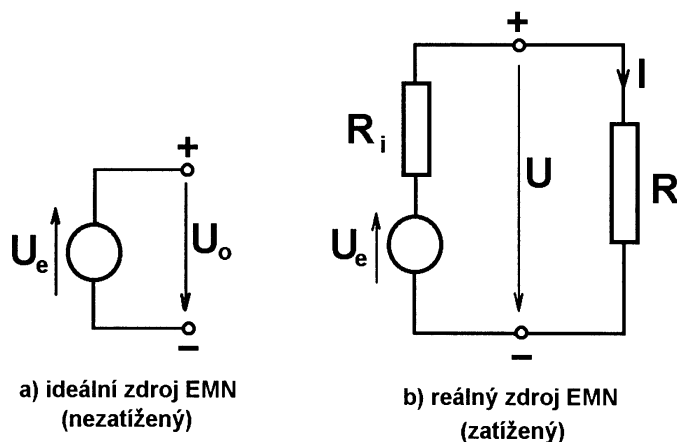
$$\oint_{A-a-B-b-A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A-a-B} \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} + \int_{B-b-A} \underbrace{(\vec{E}_{st} + \vec{E}_i)}_0 \cdot d\vec{l} = U_0,$$

kde U_0 je *svorkové napětí nezatíženého zdroje* (svorkové napětí naprázdno).

Jiné vyjádření cirkulace:

$$\oint_{A-a-B-b-A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{A-a-B} \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} + \int_{B-b-A} (\vec{E}_{st} + \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} = \underbrace{\oint_{A-a-B-b-A} \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}}_0 + \int_{B-b-A} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = U_e,$$

kde U_e je *elektromotorické napětí zdroje* (vlivem vtištěných sil uvnitř zdroje).
Schematická značka nezatíženého (ideálního zdroje EMN) je na obr. 2.9a.



Obr. 2.9.

b) Zatížený zdroj EMN

Mezi elektrodami je uvnitř vodivé prostředí, které klade procházejícímu elektrickému proudu jistý odpor R_i – *vnitřní odpor* zdroje EMN.

Ideální zdroj EMN – R_i je velmi malý – nulový R_i .

Po připojení vnějšího odporu R ke svorkám zdroje, bude obvodem procházet proud I . Tím vznikne na vnitřním odporu úbytek napětí

$$U_i = IR_i.$$

Na vnějším odporu bude napětí $U = IR$, což je *svorkové napětí zatíženého zdroje*.

Musí platit

$$U_e = IR + IR_i, \quad (2.29)$$

Vyjádříme z této rovnice proud I procházející obvodem

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}. \quad (2.30)$$

c) Zkratovaný zdroj EMN.

Pro $R \ll R_i$ je proud v obvodu omezen jen vnitřním odporem zdroje a obvodem protéká *zkratový proud* I_{zk}

$$I_{zk} = \frac{U_e}{R_i}. \quad (2.31)$$

Tvrdé zdroje napětí (malý vnitřní odpor) – I_{zk} řádově stovky ampérů $\Rightarrow$ nutnost chránit je před poškozením pojistkami nebo jističi.

Měkké zdroje napětí (velký vnitřní odpor) – $U \rightarrow 0$.

d) Zatěžovací charakteristika zdroje

závislost svorkového napětí U na odebíraném proudu I $U=f(I)$

Pro svorkové napětí $U = RI$ dostaneme

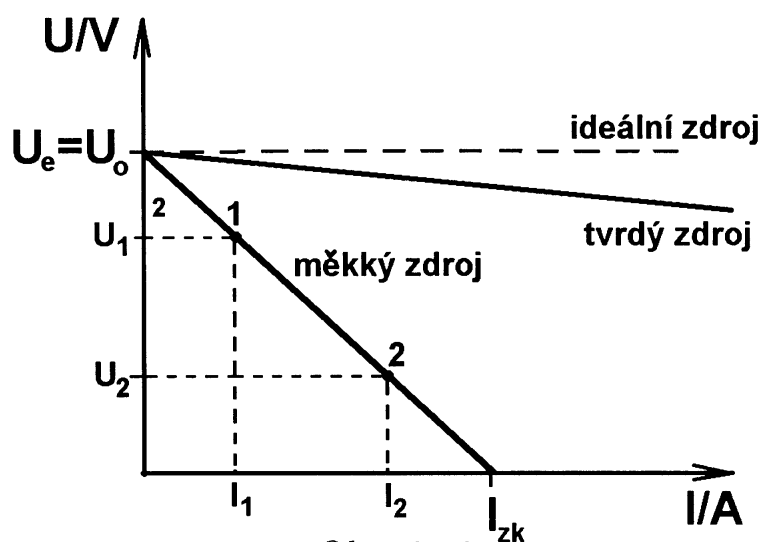
$$U = U_e - R_i I. \quad (2.32)$$

lineární zdroj – $R_i = \text{konst.}$

nelineární zdroj – $R_i \neq \text{konst.}$

Grafem je přímka, viz. obr. 2.10.

Sklon přímky závisí na vnitřním odporu zdroje R_i



Obr. 2.10.

Ze dvou bodů zatěžovací charakteristiky $(U_1, I_1)(U_2, I_2)$ můžeme určit hodnotu vnitřního odporu zdroje

$$\begin{aligned} U_1 &= U_e - R_i I_1 \\ U_2 &= U_e - R_i I_2 \end{aligned}$$

Po odečtení obou rovnic a úpravě dostaneme pro vnitřní odpor

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} \quad (2.33)$$

e) Účinnost zdroje

Část výkonu se spotřebuje na vnitřním odporu zdroje a zbývající část na vnějším odporu.

Výkon P_{int} spotřebovaný na vnitřním odporu zdroj zahřívá – ztráty energie.

Výkon P_{ext} – vnější výkon a celkový výkon P_{celk} určíme ze vztahu $P = RI^2$.

$$P_{\text{int}} = R_i I^2 = R_i \left(\frac{U_e}{R + R_i} \right)^2,$$

$$P_{\text{ext}} = RI^2 = R \left(\frac{U_e}{R + R_i} \right)^2,$$

$$P_{\text{celk}} = P_{\text{int}} + P_{\text{ext}} = \frac{U_e^2}{R + R_i}.$$

Účinnost

$$\eta = \frac{P_{\text{ext}}}{P_{\text{celk}}} = \frac{R}{R + R_i}.$$

Pro $R_i \ll R$ se účinnost zdroje blíží 1, pro měkké zdroje $\eta \ll 1$.

f) Optimální výkonové přizpůsobení zátěže zdroji EMN

V některých případech (např. u zesilovačů výkonu) požadujeme maximální P_{ext} .

Hledáme extrém funkce $P_{ext} = f(R)$

$$\frac{\partial P_{ext}}{\partial R} = 0.$$

Dosazením a derivací $U_e^2 \frac{\partial}{\partial R} [R(R + R_i)^{-2}] = \dots = U_e^2 \frac{R_i - R}{(R + R_i)^3}$

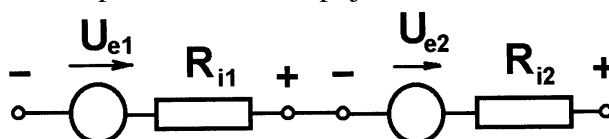
Maximální vnější výkon pro

$$R = R_i.$$

Účinnost je pouze 50%.

g) Spojování zdrojů EMN.

Sériové spojování – záporná svorka se spojí s kladnou dalšího zdroje (obr.2.11).



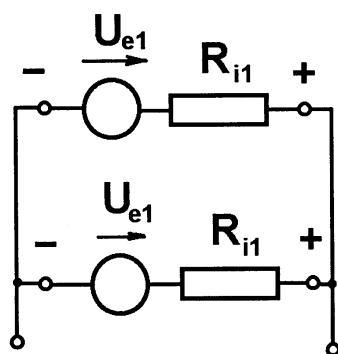
Obr. 2.11.

$$U_e = U_{e1} + U_{e2} + \dots + U_{en}. \quad (2.34)$$

Vnitřní odpory jsou zapojeny sériově

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + \dots + R_{in}. \quad (2.35)$$

Paralelní spojení – obr. 2.12 jen pro *stejně zdroje* (se stejným EMN).



Obr. 2.12.

Výsledné EMN

$$U_e = U_{e1}.$$

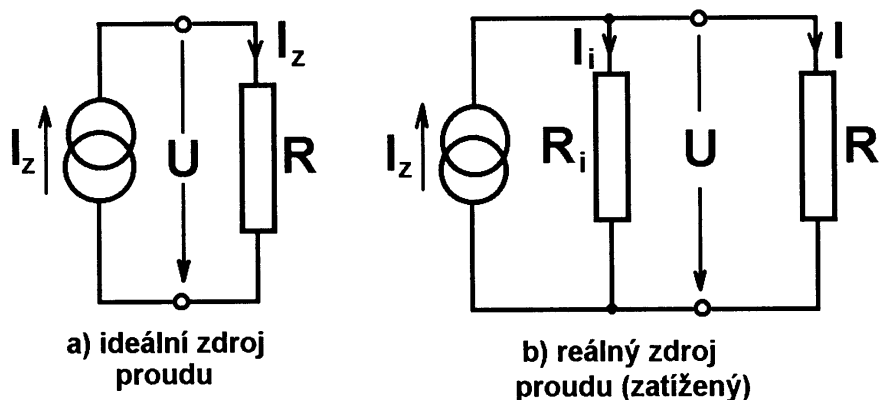
Vnitřní odpory paralelně

$$R_i = \frac{R_{i1}}{n}.$$

Spojení umožní odebírat n -krát větší proud než z jednoho zdroje.

7. Zdroj proudu

Ideální zdroj proudu – nekonečně velký vnitřní odpor – dodává $I_z = \text{konst.}$
značka ideálního zdroje – obr. 2.13a.



Obr. 2.13.

Reálný zdroj proudu – jistý R_i .

Náhradní schéma je **paralelní kombinace** ideálního zdroje proudu a vnitřního odporu R_i (obr.2.13b).

a) nezatížený reálný zdroj (naprázdno).

Celý proud I_z ideálního zdroje proudu protéká vnitřním odporem R_i .

Na vnitřním odporu je napětí odpovídající

$$U_0 = R_i I_z. \quad (2.36)$$

b) zatížený zdroj proudu

Připojením zátěže o odporu R se proud I_z rozdělí do dvou paralelních větví:

I_i protéká vnitřním odporem R_i ,

I prochází odporem R .

Podle I. Kirchhoffova zákona musí platit

$$I_z = I_i + I$$

a podle (2.27)

$$\frac{I}{I_i} = \frac{R}{R_i}.$$

Vyjádřením I_i a dosazením do druhé rovnice

$$I = I_z \frac{R_i}{R + R_i}. \quad (2.37)$$

Svorkové napětí zdroje proudu $U = RI$.

$$U = RI = I_z \frac{RR_i}{R + R_i}. \quad (2.38)$$

c) **zkratovaný zdroj proudu**

Pro případ, kdy $R \rightarrow 0$ – při zkratu bude procházet zkratový proud I_{zk} , který určíme z (2.37) pro $R \rightarrow 0$.

$$\text{Z (2.38) vyplývá} \quad I_{zk} = I_z, \quad U = 0. \quad (2.39)$$

d) Ekvivalentní nahrazení zdroje EMN zdrojem proudu

Lineární zdroj EMN U_e a s R_{in} .

Lineární zdroj proudu I_z s vnitřním odporem R_{ip} .

Podmínky, za nichž se poměry mezi proudy a napětím v obvodu záměnou nezmění.

Stavy naprázdno: porovnání

$$U_e = I_z R_{ip}$$

$$\frac{U_e}{R_{in}} = I_z$$

Odtud vyplývají podmínky pro ekvivalentní náhradu zdroje EMN:

$$R_{ip} = R_{in}, \quad I_z = \frac{U_e}{R_{in}}. \quad (2.40)$$

Poznámka: použití při řešení elektrických sítí.

2.3 ŘEŠENÍ STEJNOSMĚRNÝCH ELEKTRICKÝCH SÍTÍ

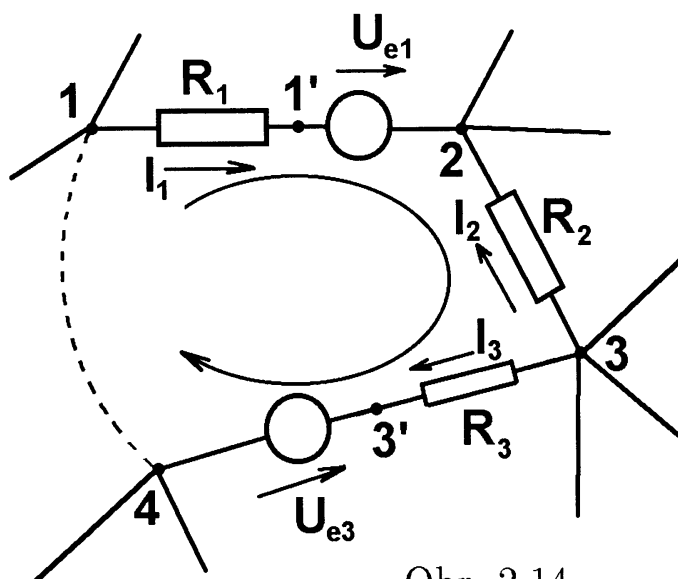
Uzel – místo vodivého spojení alespoň 3 vodičů.

Větev – část obvodu spojující 2 uzly (neprocházející dalšími uzly).

Jednoduchý uzavřený obvod (uzavřená smyčka – vybraná z rozvětvené sítě) – od jednoduchého uzavřeného obvodu se liší tím, že v různých jejích větvích jsou obecně různé proudy.

Pro uzavřené smyčky, libovolně vybrané z lineární rozvětvené sítě platí II. Kirchhoffův zákon.

1. Druhý Kirchhoffův zákon



Obr. 2.14.

- Výběr z elektrické sítě (obr. 2.14) libovolné uzavřené smyčky, např. 1-2-3-4-...-1,
- označení směrů EMN,
- označení směrů proudu u rezistorů jimiž protékají,
- volby směru postupu a výpočet cirkulace $\vec{E}$ po této smyčce.

platí
$$\oint_l \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ a } \int_M^N \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l} = U_{MN} .$$

Napětí U_{MN} je kladné, když $\vec{E}_{st} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ a záporné v případě $\vec{E}_{st} \uparrow \downarrow d\vec{l}$ a můžeme je též vyjádřit pomocí Ohmova zákona jako RI .

Upozornění: ve zdrojích EMN je integrál z intenzity vtištěných sil od – elektrody k + elektrodě roven U_e .

$$\int_{-}^{+} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = U_e .$$

Cirkulace $\vec{E}$ kolem smyčky

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^{1'} \underbrace{\vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}}_{\uparrow \uparrow} + \int_{1'}^2 (\vec{E}_{st} + \vec{E}_i) \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \underbrace{\vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}}_{\uparrow \downarrow} + \int_{3'}^3 \underbrace{\vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}}_{\uparrow \uparrow} + \int_{3'}^4 \underbrace{(\vec{E}_{st} + \vec{E}_i) \cdot d\vec{l}}_0 + \dots =$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 \pm \dots = \sum_{j=1}^n \pm R_j I_j$$

Cirkulaci $\vec{E}$ kolem smyčky lze vyjádřit ještě jiným způsobem

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{\oint_l \vec{E}_{st} \cdot d\vec{l}}_0 + \int_{1'}^2 \underbrace{\vec{E}_i \cdot d\vec{l}}_{\uparrow \uparrow} + \int_{3'}^4 \underbrace{\vec{E}_i \cdot d\vec{l}}_{\uparrow \downarrow} = U_{e1} - U_{e2} = \sum_{j=1}^n \pm U_{ej} .$$

Levé strany předcházejících výrazů jsou stejné, takže musí se rovnat i pravé strany, tj.

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 \pm \dots = U_{e1} - U_{e2} \pm \dots .$$

nebo
$$\sum_{j=1}^n \pm R_j I_j = \sum_{j=1}^n \pm U_{ej} . \quad (2.41)$$

Rovnice (2.41) vyjadřuje

II. Kirchhoffův zákon:

V uzavřené smyčce libovolně vybrané z elektrické sítě se algebraický součet úbytků napětí na jednotlivých rezistorech rovná algebraickému součtu všech elektromotorických napětí.

2. Řešení jednoduché elektrické sítě metodou postupného zjednodušování

Jednoduchou síť s jedním zdrojem EMN řešíme postupným nahrazováním výslednými odpory sériově či paralelně řazených rezistorů. Následně z U a celkového I vypočítáme proudy v jednotlivých větvích.

3. Řešení elektrických sítí užitím Kirchhoffových zákonů

Analýza elektrické sítě – při známých hodnotách odporů rezistorů a EMN zdrojů a jejich propojeních vypočítat proudy přes jednotlivé větve.

Elektrická síť – n uzlů, v větví. (v nezávislých rovnic pro stejný počet proudů)

Podle I. Kirchhoffova zákona sestavíme $u - 1$ nezávislých rovnic.

podle II. Kirchhoffova zákona sestavíme zbytek.

Celkový počet

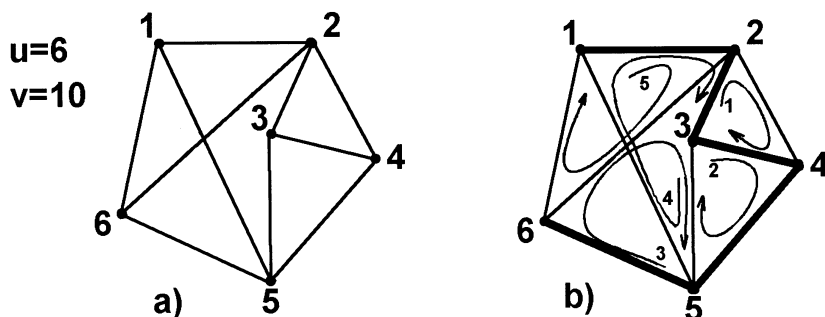
$$v - (u - 1) = v - u + 1.$$

(2.42)

Je tedy třeba ze sítě vybrat $v - u + 1$ nezávislých uzavřených smyček.

Kostra sítě – větve sítě a uzly v podobě jednoduchých čar (obr.2.15a)

Úplný strom – neuzavřená čára spojující všechny uzly (obr. 2.15b)



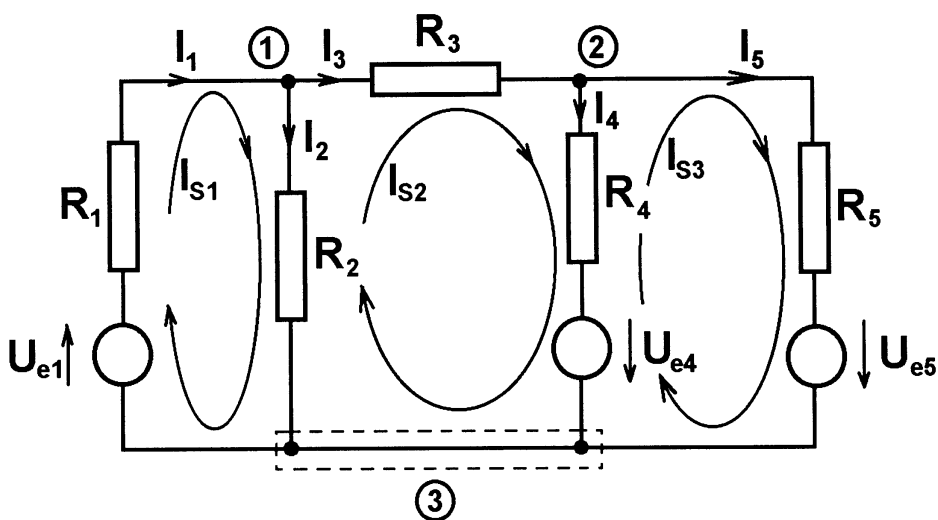
Obr. 2.15.

Nezávislé větve – **nepatří** do úplného stromu – počet $v - u + 1$

Do každé smyčky zařadíme jednu nezávislou větev, která ještě nebyla použita v předchozích smyčkách.

Postup řešení:

sít': 3 uzly ($u = 3$), 5 větví ($v = 5$) (obr. 2.16)



Obr. 2.16.

Úkol: určit 5 neznámých proudů.

Podle I. K.z. = 2 nezávislé rovnice.

Podle II. K.z. = 3 rovnice (pro vyznačené smyčky).

a) vyznačíme směry proudů ve větvích (libovolně),

b) určíme tři uzavřené nezávislé smyčky a zvolíme směr, kterým budeme ve smyčkách postupovat,

c) Napíšeme I. K.z. pro uzly 1 a 2:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$-I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

(2.43)

d) Napíšeme II. K.z. pro vyznačené smyčky:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_{e1} \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 &= U_{e4} \\ -R_4 I_4 + R_5 I_5 &= U_{e5} - U_{e4}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

e) Řešíme soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých proudů $I_1 - I_5$.

e) Po ukončení výpočtu opravíme směry proudů, jejichž hodnoty vyšly záporné.

4. Věta o náhradním zdroji napětí (věta Théveninova)

Někdy potřebujeme znát jen proud v jedné větvi a ostatní nás nezajímají.

Nahradíme celou elektrickou síť vzhledem ke dvěma uzlům jedním náhradním zdrojem EMN.

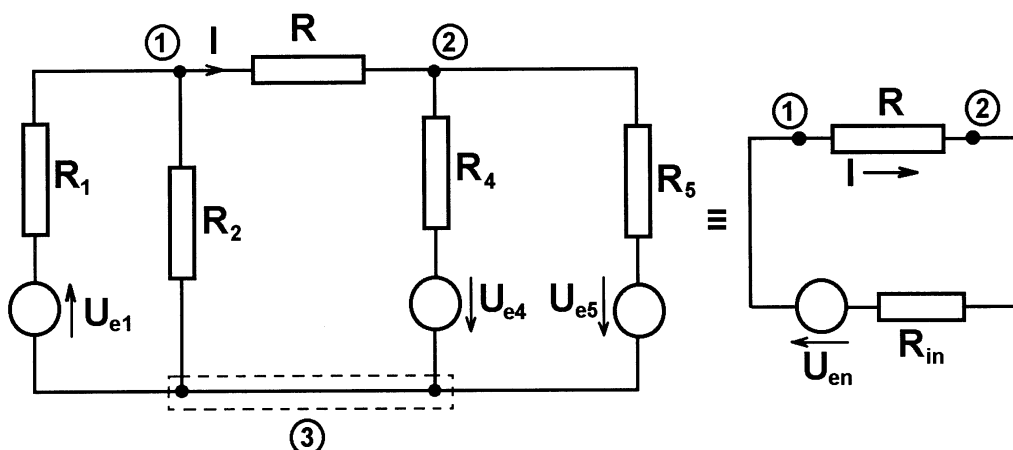
Uvažujme síť na obr. 2.17, ve které potřebujeme určit proud I jen ve větvi mezi uzly 1 a 2, jejíž odpor je R .

Věta o náhradním zdroji napětí:

a) **Náhradní zdroj napětí** o vnitřním odporu R_{in} a EMN U_{en} .

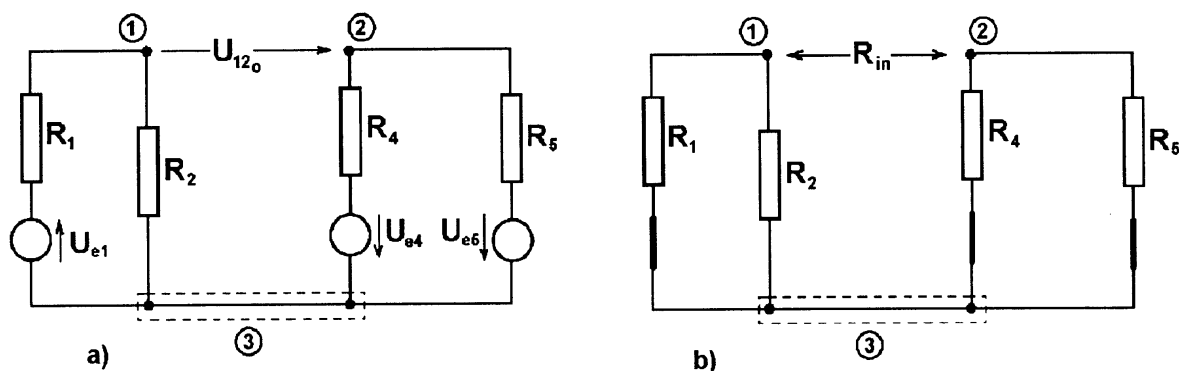
b) **Elektromotorické napětí** U_{en} náhradního zdroje je rovno napětí mezi rozpojenými uzly.

c) **Vnitřní odpor** R_{in} náhradního zdroje EMN je roven odporu elektrické sítě mezi rozpojenými uzly, nahradíme-li všechny zdroje spojkami nakrátko (obr. 2.17)



Obr. 2.17.

znázornění konkrétního postupu při určení parametrů náhradního zdroje (obr. 2.18)



Obr. 2.18.

- odpojení větve mezi uzly 1 a 2 ,
- stanovení (výpočtem nebo měřením) napětí mezi uzly U_{120}

$$U_{en} = U_{120} - \text{EMN náhradního zdroje napětí},$$

- nahrazení všech zdrojů EMN spojkami nakrátko (silně vyznačené),
- stanovení odporu sítě mezi rozpojenými uzly 1 a 2 (výpočtem nebo měřením) $\Rightarrow$ **vnitřní odpor R_{in} náhradního zdroje napětí**

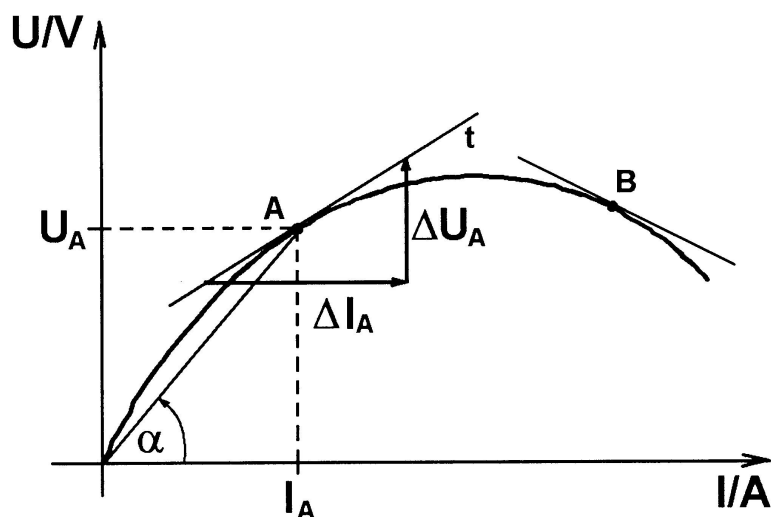
Zapojíme-li v síti mezi uzly 1 a 2 větev o odporu R , platí pro proud I

$$I = \frac{U_{en}}{R + R_{in}}. \quad (2.52)$$

6) Řešení obvodů s nelineárními rezistory

a) Statický a dynamický (diferenciální) odpor nelineárního rezistoru.

Elektrické vlastnosti nelineárního rezistoru nejlépe vystihuje jeho V - A charakteristika (obr. 2.19).



Obr. 2.19.

Statický odpor v daném bodě V - A charakteristiky

$$(R_s)_A = \frac{U_A}{I_A} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.53)$$

v každém bodě je jiná hodnota $(R_s)_A$.

Nahrazení části křivky v okolí **pracovního bodu** přímkou (tečna t ke křivce ve zvoleném pracovním bodě).

Dynamický (diferenciální) odpor nelineárního rezistoru $(R_d)_A$

$$(R_d)_A = \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = \left(\frac{dU}{dI} \right)_A, \quad (2.54)$$

- $R_d = 0$ na vrcholu V - A charakteristiky,
- $R_d > 0$ na vzestupné části V - A charakteristiky,
- $R_d < 0$ na sestupné části V - A charakteristiky.

Případ $R_d < 0$ je **nestabilní** (připojením k dostatečně tvrdému zdroji by proud neustále narůstal, dokud by nedošlo ke zničení – proto proud omezuje zapojením lineárního rezistoru do série s nelineárním rezistorem).

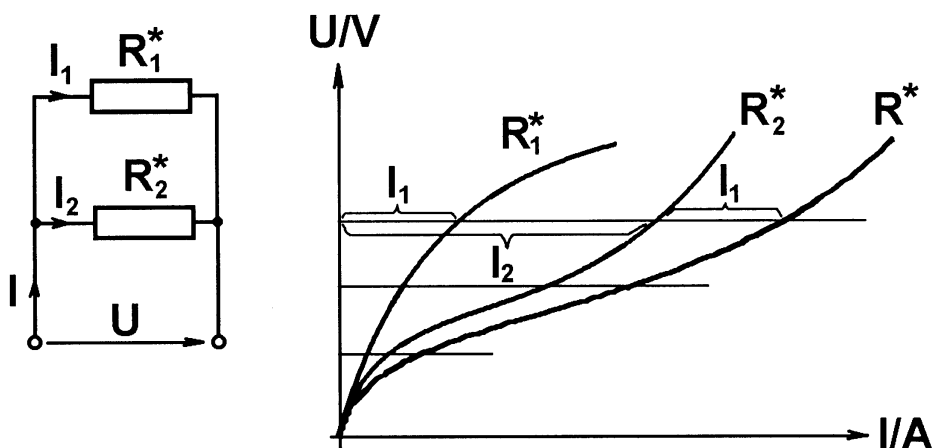
b) Řešení obvodu s paralelně zapojenými nelineárními rezistory

Uvažujme dva nelineární rezistory R_1^* a R_2^* zapojené paralelně a připojené ke zdroji o napětí U (obr. 2.20)

Napětí je stejné, proud I se rozdělí na proudy I_1 a I_2

Podle I. Kirchhoffova zákona platí: $I = I_1 + I_2$.

Při známé V - A charakteristice jednotlivých rezistorů, určíme výslednou V - A charakteristiku graficky (obr. 2.20). Tak můžeme nahradit uvažované zapojení jediným nelineárním rezistorem R^* .



Obr. 2.20.

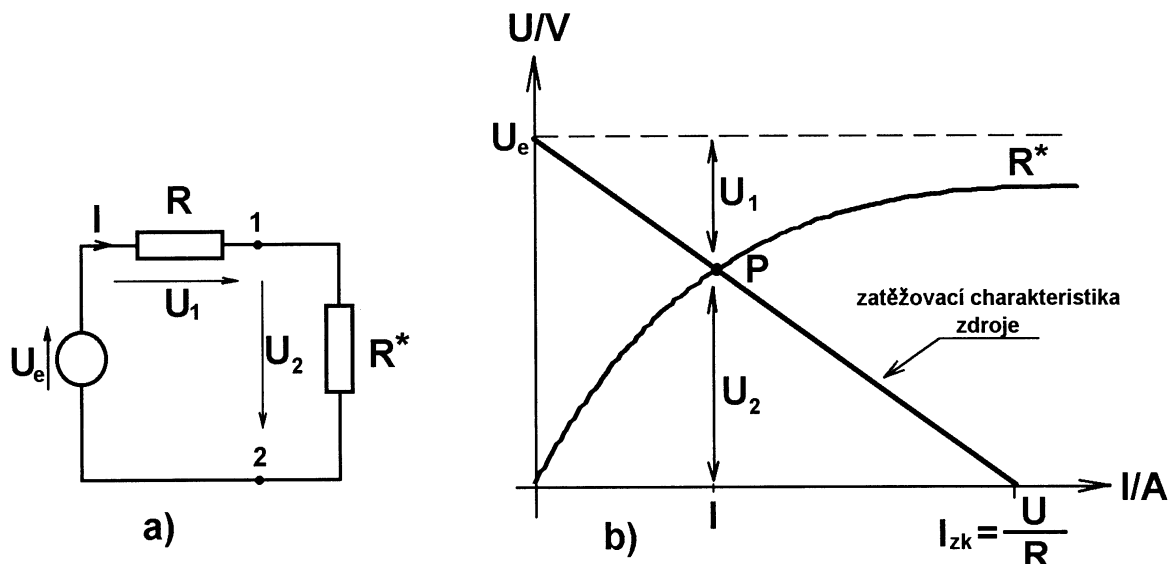
c) Řešení obvodu se sériově zapojenými nelineárními rezistory (obr. 2.21)

Oběma rezistory prochází stejný proud I , napětí se rozdělí $U = U_1 + U_2$.

Výsledná V - A charakteristika je nalezena sečtením hodnot napětí na jednotlivých rezistorech
 $\Rightarrow V$ - A charakteristika celkového nelineárního rezistoru R^* .

d) Stanovení ustáleného stavu v obvodu se sériovým zapojením lineárního a nelineárního rezistoru

Ustálený stav zjišťujeme po připojení této kombinace ke zdroji o U_e (obr. 2.22).



Obr. 2.22.

Vnitřní odpor zdroje R_i zahrnujeme do hodnoty R lineárního rezistoru.

Řešení:

- Stanovíme proud I po připojení ke zdroji EMN.
- Napětí U_1 na lineárním rezistoru R a napětí na nelineárním rezistoru R^* .

Výhodnější postup:

- Svorky 1 a 2 považujeme za svorky zdroje o U_e a vnitřním odporu R .
- Sestrojíme zatěžovací charakteristiku tohoto zdroje (prochází body $I = 0, U = U_e$ a $I_{zk} = \frac{U_e}{R}, U = 0$) – viz. obr. 2.22b.
- Zakreslíme do soustavy os V - A charakteristiku nelineárního rezistoru.
- U_2 je jednak svorkovým napětím uvažovaného zdroje a napětím nelineárního rezistoru
- $\Rightarrow$ **průsečík P** zatěžovací charakteristiky s V - A charakteristikou vyhovuje oběma podmínkám.

Ustálený stav odečteme z grafu – určíme proud I a napětí na lineárním rezistoru U_1 a U_2 na nelineárním rezistoru.

2.4. MĚŘENÍ ZÁKLADNÍCH ELEKTRICKÝCH VELIČIN

1. Měření proudu a napětí

Využití magnetických účinků elektrického proudu.

Nejrozšířenější systémy:

- deprezské,
- elektromagnetické,
- elektronické měřicí přístroje s digitální indikací na displeji.

Měřidla proudu

- ampérmetry (miliampérmetry, mikroampérmetry apod.),
- galvanoměry (s citlivostí menší než 10^{-6} A).

Měřidla napětí

- voltmetry (milivoltmetry, kilovoltmetry apod.).

Měřicí systém má vnitřní odpor R_i . Při průchodu proudem I tímto odporem je na svorkách měřicího systému napětí $U = R_i I \Rightarrow$ lze tedy stejným systémem měřit i napětí (ocejchování stupnice)

Základní proudový rozsah $I_{zakl} \Rightarrow$ proud registrovaný na posledním číslovaném dílku stupnice.

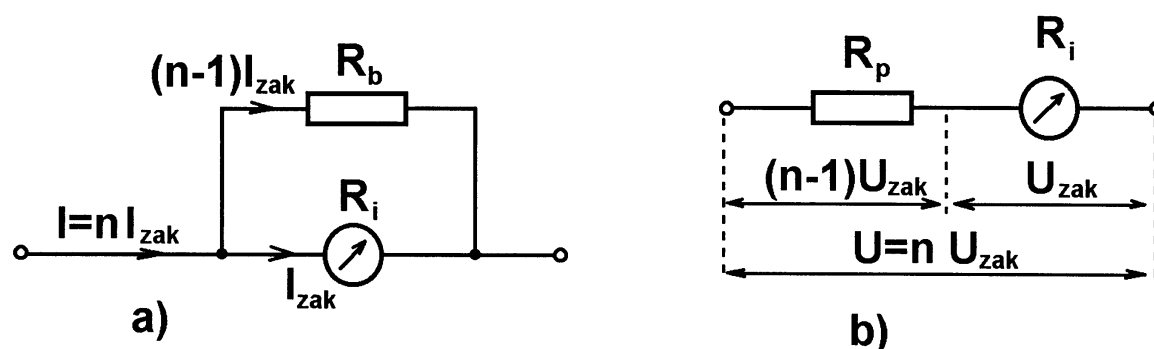
Základní napěťový rozsah $U_{zakl} \Rightarrow$ napětí na svorkách měřicího systému, které způsobí výchylku na posledním číslovaném dílku stupnice.

Oba parametry splňují Ohmův zákon

$$U_{zakl} = R_i I_{zakl}.$$

b) Změna rozsahu měřicích přístrojů

Nutnost měřit napětí a proudy v širokých rozmezích hodnot.



Obr. 2.23.

Změna měřicího rozsahu ampérmetru (obr. 2.23a)

- Zvětšení rozsahu n – krát ($I = n I_{zakl}$),
- připojení **bočnicku** o odporu R_b (paralelně),
- proud bočnickem $(n - 1) I_{zakl}$,
- proudy paralelně zapojenými rezistory

$$\frac{R_b}{R_i} = \frac{I_{zakl}}{(n - 1) I_{zakl}},$$

odtud hodnota odporu bočnicku

$$R_b = \frac{R_i}{n - 1}, \quad (2.55)$$

Změna rozsahu voltmetru (obr. 2.23b)

- Zvětšení rozsahu n – krát ($U = nU_{zakl}$),
- zapojení **předřadného rezistoru** do série s měřícím systémem,
- napětí na sériově zapojených rezistorech jsou ve stejném poměru jako jejich odpory

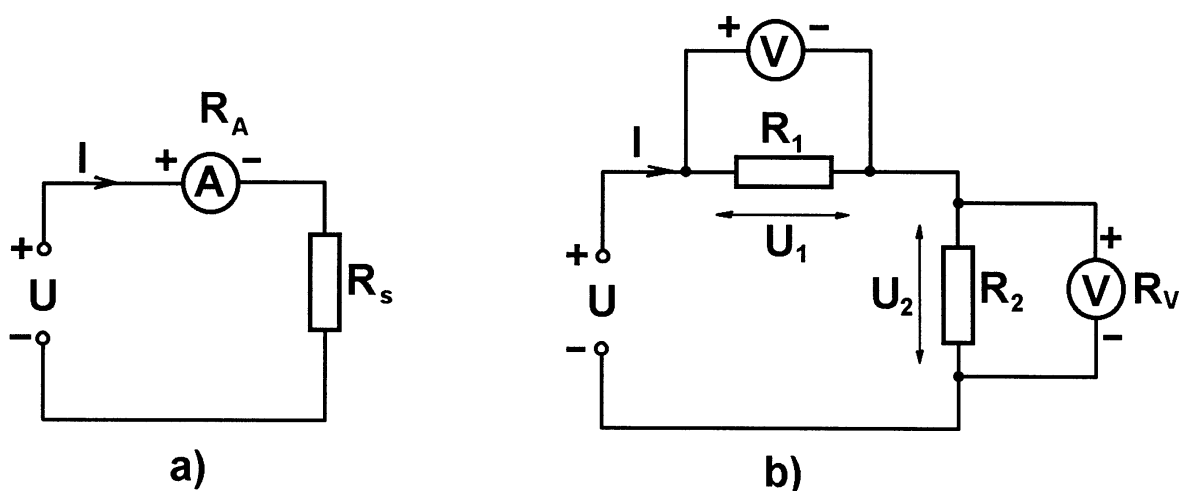
$$\frac{R_p}{R_i} = \frac{(n-1)U_{zakl}}{U_{zakl}},$$

odtud hodnota odporu předřadného rezistoru

$$R_p = (n-1)R_i, \quad (2.56)$$

b) Zapojování měřících přístrojů do elektrického obvodu

- Při měření proudu rezistorem R_s : **ampérmetr do série**.
- Vnitřní odpor R_A musí být co nejmenší (aby nedošlo k podstatné změně proudu).
- Ampérmetr nemůžeme připojit přímo ke svorkám tvrdého zdroje napětí (zkratový proud by ho zničil) $\Rightarrow$ omezení proudu v obvodu do série zapojeným spotřebičem (rezistorem R_s), viz. obr. 2.24a



Obr. 2.24.

Měření napětí: **voltmetr do paralelně**.

- Vnitřní odpor voltmetru R_V musí být co největší (zapojený paralelně) jinak se zmenší celkový odpor měřené části obvodu a dojde k poklesu napětí v této části obvodu.
- Elektronické voltmetry – odpor 10 – 100 M Ω .
- Voltmetr lze připojit přímo ke svorkám zdroje EMN.

c) Třída přesnosti měřidla. Konstanta přístroje.

Nejistoty způsobené náhodnými příčinami < nejistoty způsobené použitím měřícího přístroje.

Třída přesnosti – vyznačení v pravém dolním rohu stupnice nad značkou proudu (0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 5,0).

Přístroje normálové – třída přesnosti 0,1 nebo 0,2 – slouží pro kalibraci laboratorních a technických měřidel.

Příklad: třída přesnosti $p = 2,5$ (%) na rozsahu 100 V $\Rightarrow$ každá hodnota napětí na tomto rozsahu má **absolutní nejistotu** $\delta U = 2,5$ V.

Relativní nejistota pro $U = 50$ V $\pm 2,5$ V $\Rightarrow 5$ %,
pro $U = 25$ V $\pm 2,5$ V $\Rightarrow 10$ %.

Obecně: $1/2$ výchylky stupnice $\Rightarrow$ relativní nejistota $2p \%$,
 $1/4$ výchylky stupnice $\Rightarrow$ relativní nejistota $4p \%$,
 $1/10$ výchylky stupnice $\Rightarrow$ relativní nejistota $10p \%$,
z toho plyne: snažíme se měřit v druhé polovině stupnice.

U digitálních měřidel (dnes nejběžnější) bývá absolutní nejistota měřených hodnot udávána výrobcem v technické dokumentaci.

Konstanta přístroje:

na daném rozsahu udává hodnotu měřené veličiny připadající na jeden dílek stupnice.
Pro 600 mA při stupnici 120 dílků je konstanta miliampérmetru K

$$K = \frac{600}{120} = 5 \text{ mA / dílek} .$$

Při měření odečítáme měřené hodnoty v dílcích stupnice a později je vynásobíme konstantou přístroje (hodnoty v mA).

2. Měření odporů

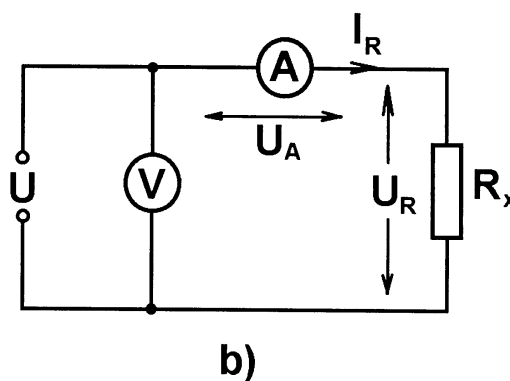
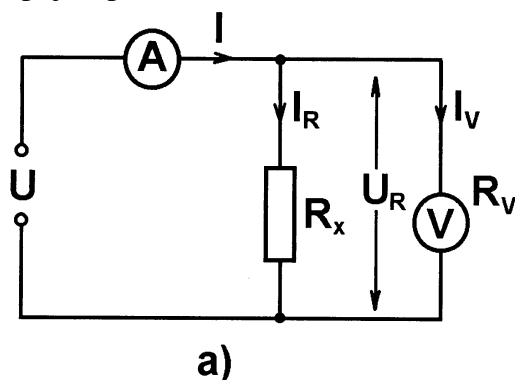
Základní metody (praktická cvičení).

a) Přímá metoda

Změříme U_R , I_R a odpor R_x určíme z Ohmova zákona.

Vyloučení soustavné chyby měření – v úvahu bereme vnitřní odpory měřidel.

Zapojení podle obr. 2.25a



Obr. 2.25.

Voltmetr V měří napětí U_R přímo na rezistoru R_x avšak ampérmetr měří celkový proud I rezistorem a voltmetrem.

Proud voltmetrem podle Ohmova zákona

$$I_R = I - \frac{U_R}{R_v} .$$

Měřený odpor

$$R_x = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_R}{I - \frac{U_R}{R_v}} . \quad (2.57)$$

Pro $I_V \ll I_R$ $R_X = \frac{U_R}{I}.$

Zapojení je vhodné pro $R_X \ll R_V.$

Zapojení podle obr. 2.25b

Ampérmetrem měříme proud I_R procházející měřeným rezistorem avšak voltmetr V měří celkové napětí U na sériové kombinaci odporu ampérmetru a měřeného odporu.

Napětí na měřeném rezistoru je $U_R = U - R_A I_R,$

hodnota odporu měřeného rezistorem vypočteme z Ohmova zákona

$$R_X = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U - R_A I_R}{I_R}. \quad (2.58)$$

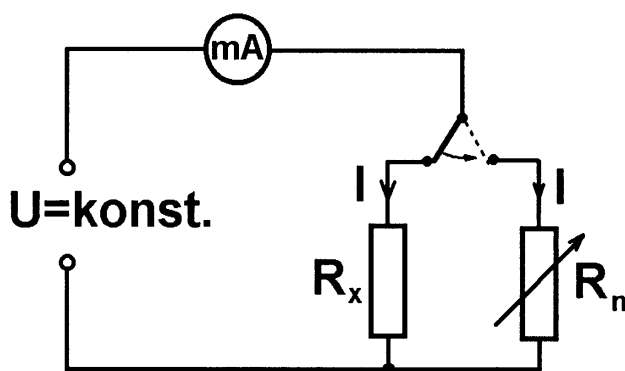
Pro napětí $U_A \ll U_R$ můžeme člen $R_A I_R$ zanedbat.

Zapojení je vhodné pro $R_A \ll R_X.$

b) Substituční metoda měření odporů

Vychází z podmínky:

- dvěma rezistory prochází stejný proud I při stejném napětí U na rezistorech v případě, že odpory obou rezistorů jsou stejné, viz. zapojení na obr. 2.26.



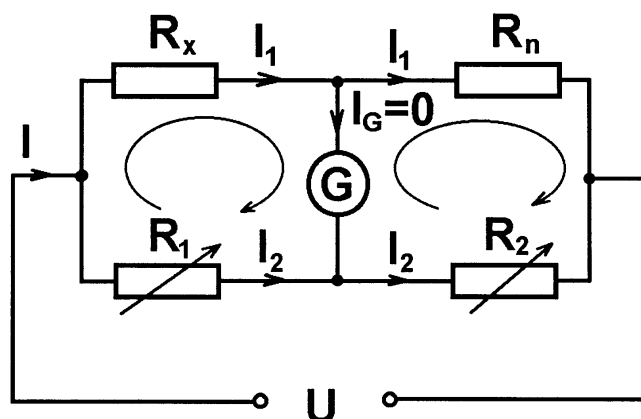
Obr. 2.26.

- Při konstantním napětí změříme I měřeným rezistorem R_X .
- Přepnutím přepínače P do polohy odpovídající zařazenému R_n (odporová dekáda).
- Vyhledání takové hodnoty R_n až obvodem prochází stejný proud I jako v případě R_X
 $R_X = R_n.$

c) Můstková metoda (Wheatstoneův můstek), obr. 2.27

Pokud prochází galvanoměrem proud $I_G \neq 0$ – *nevyvážený můstek*.

Dosažením rovnováhy změnou odporů R_1 nebo R_2 , tedy $I_G = 0$ – *vyvážený můstek*.



Obr. 2.27.

Podle II. Kirchhoffova zákona platí pro vyznačené uzavřené smyčky:

$$I_1 R_x - I_2 R_1 = 0 \quad \text{tedy} \quad I_1 R_x = I_2 R_1,$$

$$I_1 R_n - I_2 R_2 = 0 \quad \text{tedy} \quad I_1 R_n = I_2 R_2.$$

vydělením obou rovnic

$$R_x = R_n \frac{R_1}{R_2}. \quad (2.59)$$

Odpory 1 a 2 můžeme nahradit odporovým drátem s posuvným kontaktem.

Potom

$$R_x = R_n \frac{l_1}{l_2}.$$

Můstkové metody jsou přesné a používají se i pro měření kapacit a indukčností v obvodech střídavého proudu.

3. Měření výkonu

Pomocí voltmetru a ampérmetru $P = UI$.

Wattmetr pro přímá měření (dvě cívky: proudová a napěťová, které se ovlivňují svými magnetickými poli).

Poznámka: proudová cívka se zapojuje sériově a napěťová paralelně do obvodu.

4. Regulace napětí a proudu

V případě zdroje konstantního napětí používáme pro regulaci proudu a napětí **posuvných válcových rezistorů**. (odporová drát navinutý na keramickém válci – dvě stejně označené svorky)

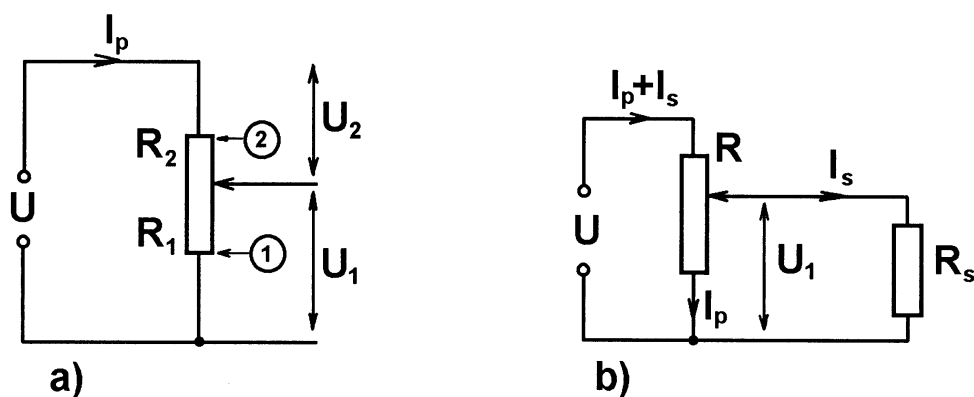
Jezdec – posuvný kontakt vyvedený na třetí odlišně označené svorku.

Na štítku je uvedena:

- hodnota celkového odporu R ,
- hodnota maximálního přípustného proudu I_{max} .

a) **Dělič napětí (potenciometr)**, obr. 2.28a

Napětí zdroje se rozdělí v poměru odporu jednotlivých částí



Obr. 2.28.

$$U_1 + U_2 = U \quad \text{a} \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Do polohy "1", kde $U_1 = 0$ umístíme jezdce před začátkem měření
V poloze "2" je $U_1 = U$.

Na obr. 2.28b je zatížený dělič napětí spotřebičem o odporu R_s . V tomto případě prochází spotřebičem proud $I_s = \frac{U_1}{R_s}$ a horní částí děliče proud $I = I_p + I_s = \frac{U}{R} + \frac{U_1}{R_s}$.

Celkový proud I musí být menší (maxim. roven) maximálnímu proudu I_{max} .

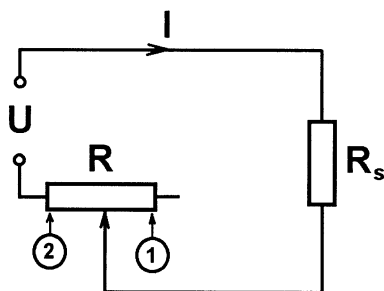
Poznámka:

Pro $R_s \ll R$ je regulace napětí na spotřebiči výrazně nelineární.

b) Reostat

Změna proudu v obvodu při konstantním napětí změnou odporu obvodu, viz. obr.2.29.

V poloze "1" (celý odpor R) prochází obvodem **nejmenší proud** I_1 .



Obr. 2.29.

Celkový odpor obvodu

$$R + R_s$$

a proud

$$I_1 = \frac{U}{R + R_s}.$$

Posunem jezdce směrem k poloze "2" proud zvyšujeme.

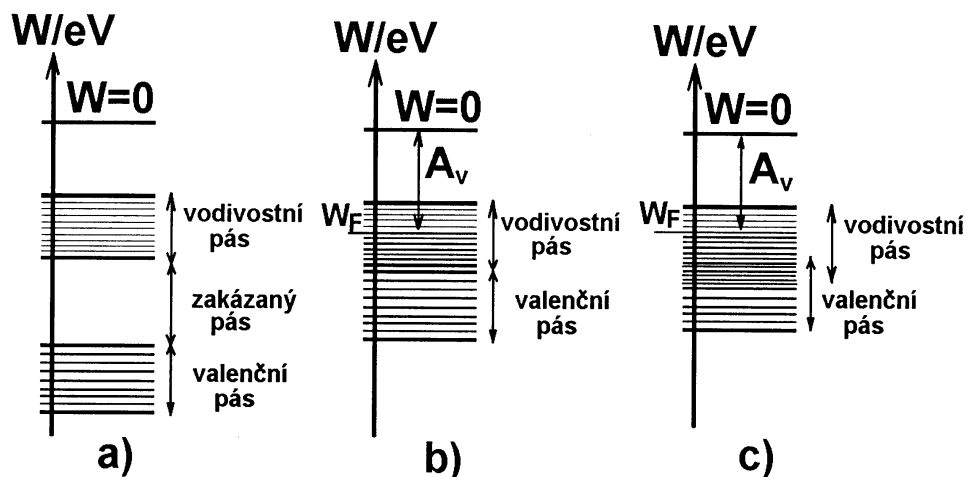
Největší hodnota proudu I_2 pro úplně vyřazený posuvný válcový rezistor

$$I_2 = \frac{U}{R_s}.$$

2.5. TERMOELEKTRICKÉ JEVY

1. Pásový model pevných látek. Výstupní práce elektronu z kovu

- Elektrony v látce se nachází v poli kladných jader atomů.
- Elektrony $-e$ mají v tomto poli zápornou potenciální energii $W_P = -e\varphi$.
- $W_K \ll W_P$ tedy jejich celková energie je záporná.
- Elektrony (fermiony) jsou částice se spinem $1/2$ a tedy jejich energie je *kvantovaná* (v osamoceném atomu tvoří diskrétní energetické hladiny).
- V pevné látce (interakce více atomů) se tyto hladiny rozpadají do *pásů* (velký počet velmi blízkých hladin energie), viz. obr. 2.30.



Obr. 2.30.

Elektrony ve valenční slupce atomů jsou v elektrickém poli o větším potenciálu (mají tedy potenciální energii nižší než volné elektrony, které se v krystalové mřížce pohybují a způsobují *vodivost látky*).

Pásový diagram dielektrik a polovodičů, obr. 2.30a.

Energie *elektronvolt*, $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

valenční pás – vyjadřuje povolené hodnoty energie valenčních elektronů v atomech látky.

Volný elektron $\Rightarrow$ přechod z valenčního pásu přes **zakázaný pás** (nutná dostatečná energie) do **vodivostního pásu**.

Šířka zakázaného pásu:

- u *dielektrik* velmi široká (více než 3 eV) $\Rightarrow$ neobsazené hladiny ve vodivostním pásu a tedy *látka nevede elektrický proud*,
- u *polovodičů* šířka kolem 1 eV $\Rightarrow$ za pokojové teploty jistá část elektronů z valenčního pásu přechází do vodivostního a způsobuje *částečnou vodivost látky*.

Pásový diagram u kovů, obr. 2.30 b,c

vodivostní pás navazuje (překrývá se) s valenčním pásem $\Rightarrow$ vodivost kovů je velmi dobrá.

Způsob obsazení hladin závisí na teplotě látky. U kovů při teplotách blízkých 0 K se nejvyšší obsazená hladina ve vodivostním pásu označuje W_F – **Fermiho energie**.

Poznámka: u izolantů a polovodičů prochází hladina Fermiho energie W_F středem zakázaného pásu.

Vně kovu je $\varphi = 0$ a tedy i $W_p = 0$.

Výstupní práce A_v energie potřebná pro uvolnění volného elektronu ze systému hladin. (A_v je dáno rozdílem energií mezi hladinou $W = 0$ a hladinou Fermiho energie $W = W_F$).

Různé kovy mají různé hodnoty výstupní práce elektronů z kovů $\Rightarrow$ při dotyku těchto kovů vzniká **kontaktní potenciál**.

2. Kontaktní rozdíl potenciálů

Elektrony přecházejí z kovu o menší A_v do kovu s větší $A_v \Rightarrow$ kov s menší A_v se **nabíjí kladně** a kov s větší A_v se **nabíjí záporně**.

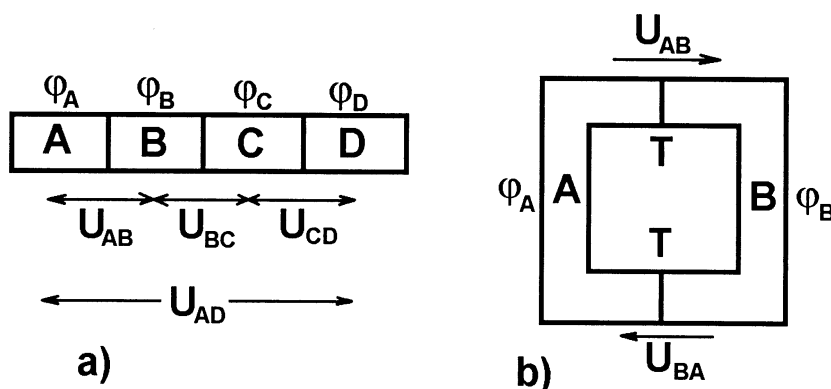
Rozdíl jejich potenciálů se nazývá **kontaktní rozdíl potenciálů (kontaktní napětí)**.

Koncem 18. stol. A. Volta experimentálně sestavil následující řadu kovů:

+ Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd –.

Každý kov v řadě při dotyku s libovolným následujícím kovem se nabíjí kladně (čím je větší vzdálenost v této řadě, tím je větší kontaktní rozdíl potenciálů).

Uvažujme řadu kovů A, B, C a D (obr. 2.31a)



Obr. 2.31.

Kovy se nabíjí na potenciály φ_A , φ_B , φ_C , φ_D a jejich kontaktní napětí

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B, U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C, U_{CD} = \varphi_C - \varphi_D.$$

Kontaktní napětí mezi prvním a posledním kovem je

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_C + \varphi_C - \varphi_D = \varphi_A - \varphi_D.$$

KN Závisí na materiálu prvního a posledního kovu v řadě a nezávisí na složení vnitřních kovů řady.

Uzavřený obvod, obr. 2.31b.

Celkové kontaktní napětí U

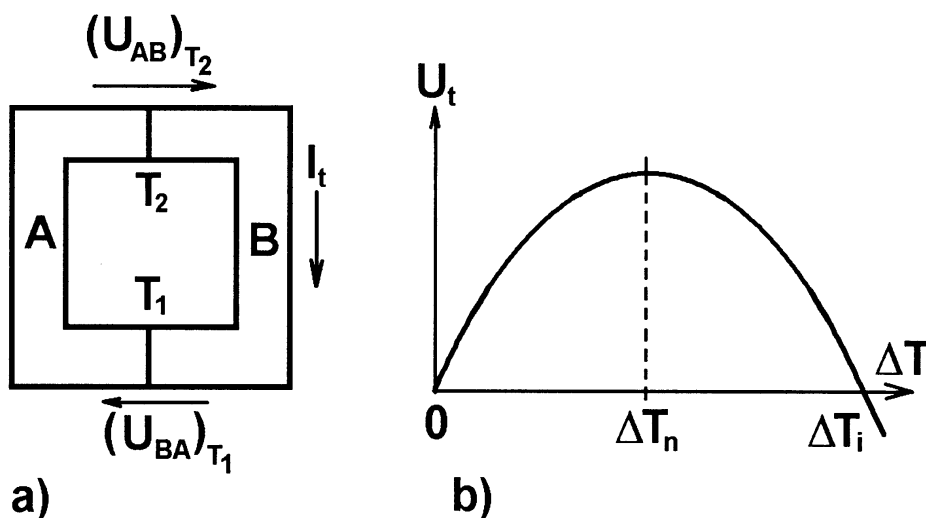
$$U = U_{AB} + U_{BA} = \varphi_A - \varphi_B + \varphi_B - \varphi_A = 0.$$

Součet všech kontaktních napětí v uzavřeném obvodu je roven nule v případě, že teplota T všech spojů je stejná.

1) Seebeckův jev

Velikost kontaktního rozdílu potenciálů závisí na teplotě.

V obvodu z kovů A a B na obr. 2. 32a je jeden konec udržován na teplotě T_1 a druhý na teplotě $T_2 > T_1$.



Obr. 2.32.

$|(U_{AB})_{T_2}| \neq |(U_{BA})_{T_1}| \Rightarrow$ obvodem bude procházet **termoelektrický proud** (objevil Seebeck r. 1821).

Termoelektrický proud v uzavřeném obvodu je způsoben **termoelektrickým napětím** U_t (důsledkem rozdílných teplot spojů – velikost závisí na materiálu a na ΔT mezi spoji).

Přibližně platí

$$U_t = (a_A - a_B)\Delta T + \frac{1}{2}(b_A - b_B)(\Delta T)^2. \quad (2.60)$$

Koeficienty a_A, a_B, b_A, b_B – Seebeckovy koeficienty kovu A a kovu B.

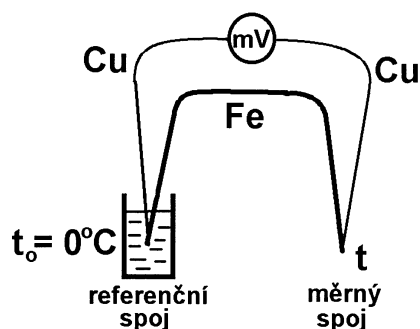
Grafem této závislosti je parabola znázorněná na obr. 2.32b.

Neutrální teplotní rozdíl ΔT_n odpovídá vrcholu paraboly, kde U_t dosahuje maximum, sle je málo závislé na změnách teploty.

Při **inverzním teplotním rozdílu** ΔT_i je U_t rovno nule.

Dalším zvýšením rozdílu teplot se dosáhne změny polarity U_t .

Termočlánek – zařízení pro regulační účely nebo k měření teploty (známe-li průběh závislosti U_t na ΔT můžeme stanovit teplotu). V praxi se termočlánek realizuje třemi dráty (krajní jsou ze stejného materiálu), obr. 2.33.



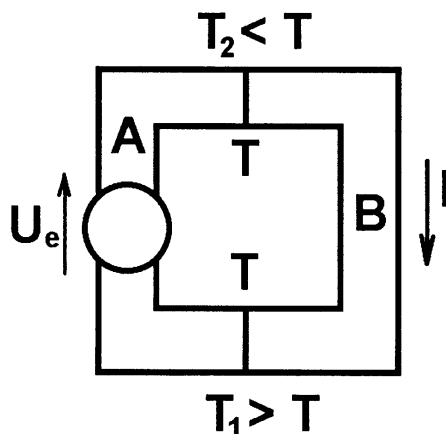
Obr. 2.33.

Referenční spoj se udržuje na konstantní teplotě 0°C (směs vody a ledu).
Měrný spoj je v tepelném kontaktu s předmětem, jehož teplotu zjišťujeme.

2) Peltiérův jev

Jedná se inverzní Seebeckův jev objevený J. Peltierem r. 1834.

Zařadíme-li do uzavřeného obvodu složeného ze dvou kovů zdroj EMN U_e , který v obvodu vyvolá proud I , začne se jeden spoj zahřívat a druhý ochlazovat, obr. 2.34. (Vyvolá-li zdroj EMN proud stejného směru jako při Seebeckově jevu, začne se ochlazovat spoj, který měl při Seebeckově jevu vyšší teplotu).



Obr. 2.34.

Peltierovo teplo

$$Q_p = pIt.$$

p – Peltiérův koeficient. Kontaktní napětí v jednom spoji elektrony urychluje (zahřívá se) v druhém brzdí (teplo se odnímá mřížce a spoj se ochlazuje).

Peltierovy baterie – spojení kovu s polovodičem.

Ochlazované spoje jsou na jedné straně a zahříváné na druhé (chladí se).

Lze dosáhnout snížení až o 20°C od okolní teploty.

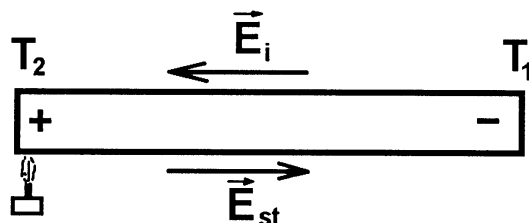
Peltierova baterie se napájí velkým proudem (až 20 A) při malém napětí napájecího zdroje.

3) Thomsonův jev

W. Thomson r. 1851 zjistil, že při vyvolání teplotního spádu na vodiči jednoho druhu vznikne na koncích nepatrné termoelektrické napětí (nemá praktický význam).

Elektrické pole ve vodiči $\vec{E}_{st}$ směřuje od teplejšího konce ke studenějšímu.

Intenzita vtištěných sil $\vec{E}_i$ vyvolaná teplotním spádem a způsobující přemístění elektronů má směr opačný (obr. 2.35)



Obr. 2.35.

$$\vec{E}_i = \vartheta \text{grad}T = \vartheta \frac{dT}{dl},$$

kde ϑ je Thomsonův koeficient (kladný nebo záporný, pro olovo nulový)
Thomsonovo termoelektrické napětí

$$U_T = \int_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_l \vartheta \frac{dT}{dl} \cdot dl = \int_{T_1}^{T_2} \vartheta dT = \vartheta(T_2 - T_1).$$

2.6. VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V POLOVODIČÍCH

Měrný elektrický odpor polovodičů $10^{-6} \Omega \cdot \text{m} - 10^8 \Omega \cdot \text{m}$.

Silná závislost vodivosti polovodičů na:

- teplotě,
- osvětlení,
- čistotě látky,
- jiných fyzikálních faktorech.

Do skupiny polovodičů patří řada **anorganických** a **organických látek**,
Největší praktické využití mají Se, PbS, CuO, Ge, Si, GaAs, CdTe atd.

Teorie polovodičů pro Si (Ge)

Dva mechanismy vodivosti: **vlastní vodivost** a **nevlastní vodivost**.

1. Vlastní polovodiče

Vlastní vodivostí se vyznačují všechny polovodiče.

Nevlastní vodivost existuje jen u **příměsových polovodičů**.

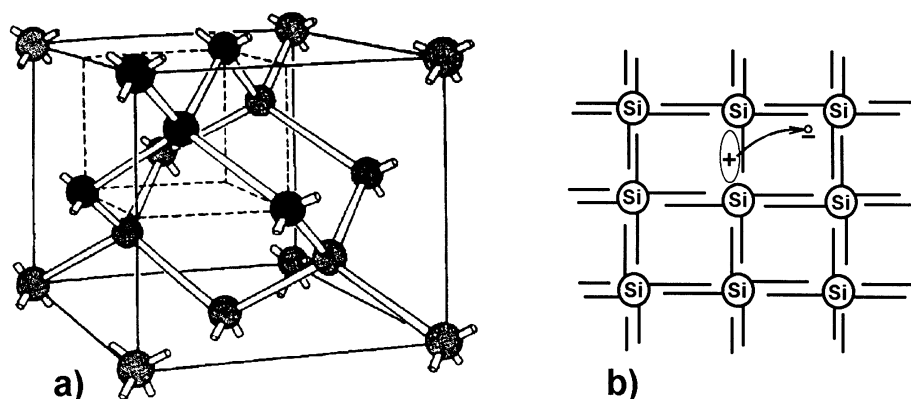
- Vlastní polovodič se při 0 K podobá izolantu (prázdný vodivostní pás).
- Při vyšších teplotách dochází k tepelné excitaci některých atomů polovodiče (elektrony přejdou z valenčního do vodivostního pásu).
Elektron musí z excitace (tepelné nebo jiné) získat energii potřebnou k překonání šířky zakázaného pásu energií (Ge – 0,72 eV, Si – 1,12 eV).
- Počet uvolněných elektronů rychle roste s rostoucí teplotou $\Rightarrow$ měrný elektrický odpor s rostoucí teplotou rychle klesá.

Díra – neobsazené místo po elektronu ve valenčním pásu (přesouvá se v elektrickém poli jako kladný náboj).

Ve vlastním polovodiči jsou nosiči proudu elektrony a díry (vznikají v párech).

Ge a Si – prvky ve 4. sloupci Mendělejevova periodického systému $\Rightarrow$ čtyřmocné prvky (krystalizují v diamantové mřížce – obr. 2.36a).

Kolem každého atomu jsou v prostoru symetricky rozmístěné čtyři atomy (obr. 2.36b), se kterým je středový atom vázán kovalentní vazbou.



Obr. 2.36.

2. Nevlastní polovodiče

Nevlastní vodivost – zabudováním jiných atomů s odlišným počtem valenčních elektronů do krystalové mřížky.

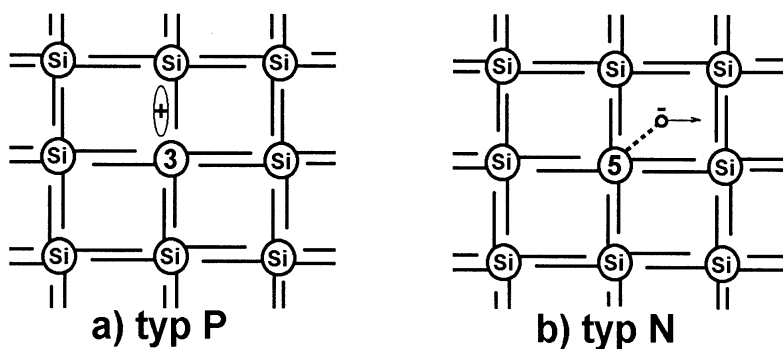
Zabudování 3 mocného atomu (Al, B, In) do krystalové mřížky se 4 mocnými atomy (Si) $\Rightarrow$ vznik díry – **akceptor**. (obr. 2.37)

Polovodič typu P – v polovodiči dotovaném 3 mocnými atomy převládá **děrová vodivost**.

Nahrazením atomu Si 5 mocným atomem (As, P) $\Rightarrow$ vznik volného elektronu (vazební energie jen 0,05 eV) – **donor**.

Polovodič typu N – polovodič s převládající elektronovou vodivostí.

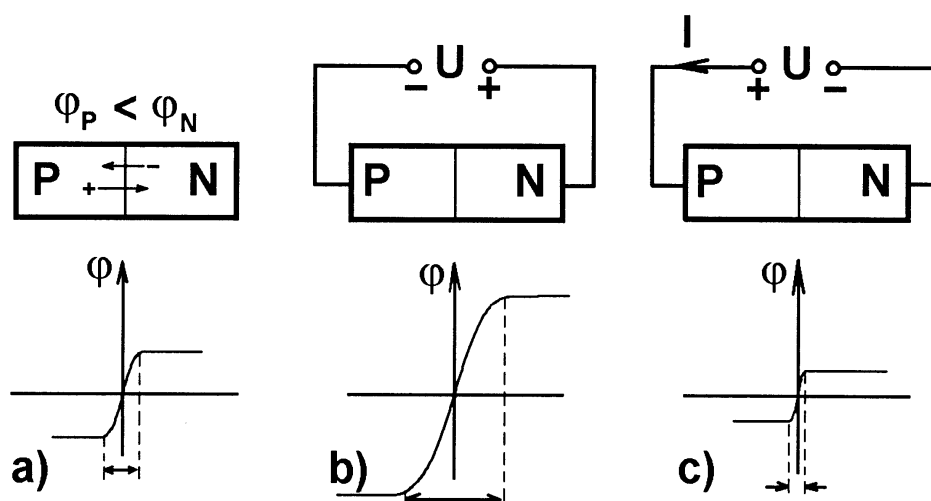
Majoritní (ve většině) a **minoritní** (menšinový nositelé proudu opačného znaménka).



Obr. 2.37.

3. Jevy na přechodu PN

- Elektrony přecházejí z míst o velké koncentraci do míst o nižší koncentraci, tedy z polovodiče N do polovodiče P, díry difundují z polovodiče P do polovodiče N ($\varphi_P < \varphi_N$) – na přechodu vznikne potenciálová překrada, viz. obr. 2.38a).



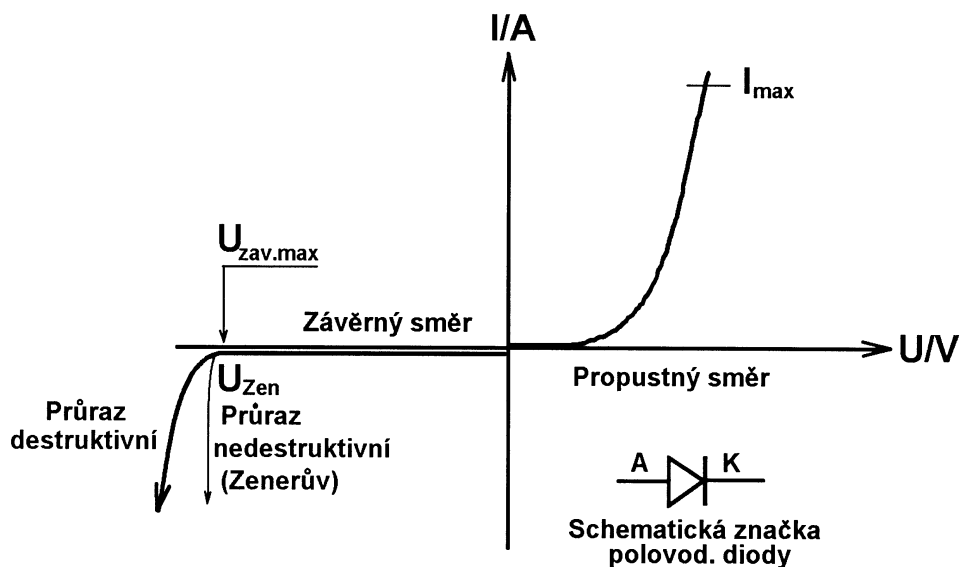
Obr. 2.38.

Přivedení napětí na PN přechod:

- Záporný** pól k P polovodiči, **kladný** pól k N polovodiči (obr. 2.38b), majoritní nositelé budou odpuzováni od přechodu $\Rightarrow$ šířka potenciálové bariéry se rozšíří vlivem napětí U – **zapojení v závěrném směru**.
- Kladný** pól zdroje k P polovodiči, **záporný** pól k N polovodiči (obr. 2.38c), potenciálová bariéra se sníží a zúží (majoritní nositelé jsou odpuzováni směrem k přechodu PN) – **zapojení přechodu v propustném směru**.
- Přechod PN má nesouměrnou vodivost – záleží na polaritě připojeného zdroje napětí (základ polovodičových diod).

4. Polovodičové diody

V-A charakteristika, obr. 2.39.



Obr. 2.39.

V *propustném směru* – proud prochází po překonání potenciálové bariéry (Ge dioda 0,2 V až 0,3 V, Si dioda 0,65 V)

Pro každý typ diody výrobce udává I_{max} v propustném směru (jinak přehřátí a zničení).

V *závěrném směru* – malý **závěrný proud** tvořený minoritními nosiči. Překročením $U_{zav.max}$ dojde k lavinovitému narůstání proudu (destruktivní průraz).

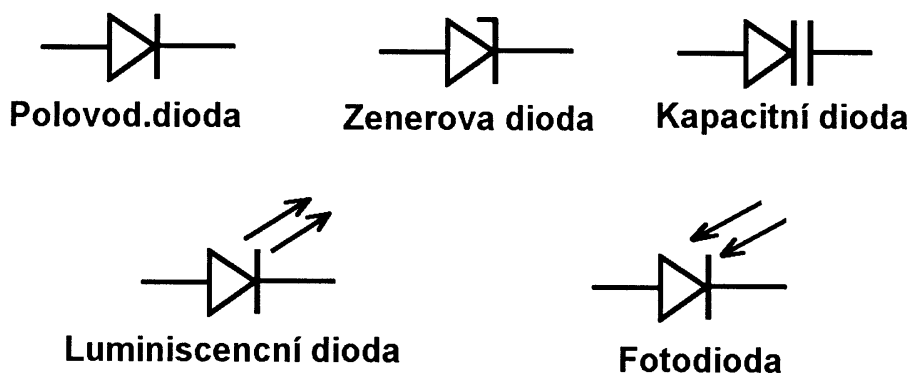
Zenerova dioda

speciálně zkonstruovaná dioda s malou šířkou přechodu PN a nedestruktivním průrazem v závěrném směru (po snížení napětí se přechod vrátí do původního stavu) $\Rightarrow$ **stabilizace napětí**.

Využití diod:

- *Usměrňování střídavých proudů* – využití nesymetrické vodivosti polovodičových diod.
- *Plošné diody* – usměrnění větších proudů technických frekvencí (velká kapacita přechodu),
- *hrotové diody* – usměrnění malých proudů (malá kapacita přechodu),
- *kapacitní diody (varikapy)* – velikostí závěrného napětí lze řídit šířku přechodu (kapacitu přechodu). Pracuje jako proměnný kondenzátor řízený napětím,
- *luminiscenční diody* – pro indikační a signalizační účely (napětí vyvolá na přechodu emisi světla),
- *fotodiody* – světlo dopadající na přechod vyvolá zvětšení napětí na přechodu PN.

Schematické značky jednotlivých typů polovodičových diod, obr. 2.40



Obr. 2.40.

2. 7. VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V ELEKTROLYTECH

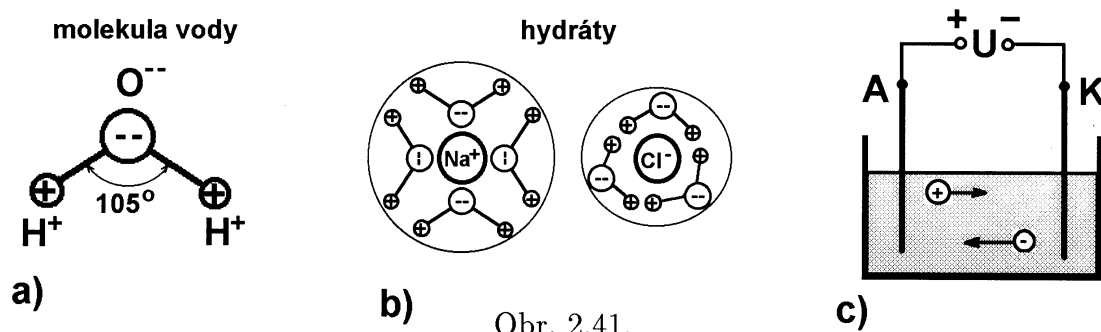
1. Elektrolyty. Elektrolytická disociace a rekombinace.

Elektrolyty – roztoky vedoucí elektrický proud – *vodiče II. třídy*,

Schopnost rozpouštědel vytvářet vodivé roztoky závisí na ϵ_r (větší $\epsilon_r \Rightarrow$ větší schopnost. H_2O má $\epsilon_r = 80$),

Elektrolytická disociace – rozštěpení částí molekul na kladné a záporné ionty vlivem působení molekul rozpouštědla.

- Rozpouštění heteropolárních látek (dva ionty opačných znamének),
- nenulový elektrický dipólový moment molekul rozpouštědla – molekula $+H_2O-$ (obr. 2.41a).



Obr. 2.41.

Solváty – ionty rozpuštěné látky obklopené molekulami rozpouštědla,

Hydráty – totéž ve vodných roztocích (obr. 2.41b),

V elektrickém prostředí se útvary pohybují jako celek (překonávají odpor prostředí).

Rekombinace iontů – spojování kladných a záporných iontů na neutrální molekuly.

Pro n_0 molekul rozpuštěné látky v 1 m^3 elektrolytu

a n disociovaných molekul v 1 m^3

$$\text{stupeň disociace} \quad \alpha = \frac{n}{n_0} \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.61)$$

počet disociovaných molekul n a nedisociovaných molekul n'

$$n = n_0 \alpha, \quad n' = n_0 - n = n_0 (1 - \alpha), \quad (2.62)$$

$$n_+ = n_- = n,$$

počet disociujících molekul Δn_d za 1 s v 1 m^3 je úměrný počtu dosud nedisociovaných molekul n'

$$\Delta n_d = k_d n_0 (1 - \alpha), \quad (2.63)$$

počet rekombinujících molekul Δn_r za 1 s v 1 m^3 je úměrný jak počtu + tak - iontů (n^2)

$$\Delta n_r = k_r n_0^2 \alpha^2, \quad (2.64)$$

dynamická rovnováha mezi disociací a rekombinací $\Delta n_d = \Delta n_r$

$$k_d n_0 (1 - \alpha) = k_r n_0^2 \alpha^2,$$

po úpravě

$$\frac{1 - \alpha}{\alpha^2} = \frac{k_r}{k_d} n_0 = \text{konst.} n_0. \quad (2.65)$$

Je-li roztok koncentrovaný n_0 je velké a proto i výraz na levé straně musí být velký ($\alpha \ll 1$)
v silně koncentrovaných roztocích je nízký stupeň disociace.

V slabě koncentrovaných roztocích jsou téměř všechny molekuly rozpuštěné látky disociovány.

Koncentraci roztoků vyjadřujeme jako:

- **hmotnostní koncentraci** (kg.m^{-3} , g.l^{-1}),
- **molární koncentrace** (mol.m^{-3} , mol/l).

Voda je slabě disociována (obsahuje H^+ OH^-),
 koncentrace vodíkových iontů $[\text{H}^+] = 10^{-7}$

pH roztoku $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, (2.66)

U *neutrálních roztoků* (např. voda) $\text{pH} = 7$,
zásadité roztoky $\text{pH} > 7$,
kyselé roztoky $\text{pH} < 7$.

2. Vedení elektrického proudu v elektrolytu

katoda (záporná elektroda) a **anoda** (kladná elektroda) v elektrolytu $\Rightarrow$ pole $\vec{E}_{st}$ viz. obr. 2.41c.

náboj iontů $\pm q_0 = \pm ze$,

z – mocenství iontu.

Elektrické síly $\vec{F}_e = \pm ze\vec{E}_{st}$ způsobí pohyb iontů – **záporné ionty (anionty)**, **kladné ionty (kationty)**.

Proti pohybu iontů-solvátů působí síly odporu prostředí $\vec{F}_t$ (příměrně rychlosti iontů)

Ustálený stav – síly odporu prostředí

$$\vec{F}_{t+} = -k_+ \vec{v}_{p+}, \quad \vec{F}_{t-} = -k_- \vec{v}_{p-}.$$

Ustálený stav $\vec{F}_{e+} + \vec{F}_{t+} = 0, \quad \vec{F}_{e-} + \vec{F}_{t-} = 0.$

Po dosazení $ze\vec{E}_{st} - k_+ \vec{v}_{p+} = 0,$

$$-ze\vec{E}_{st} - k_- \vec{v}_{p-} = 0.$$

Odtud průměrné rychlosti pohybu kladných a záporných iontů:

$$\vec{v}_{p+} = \frac{ze}{k_+} \vec{E}_{st} = u_+ \vec{E}_{st},$$

$$\vec{v}_{p-} = -\frac{ze}{k_-} \vec{E}_{st} = -u_- \vec{E}_{st},$$

kde u_+ a u_- jsou pohyblivosti iontů.

Hustotu proudu v elektrolytu

$$\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_- = n_0 \alpha ze(u_+ + u_-) \vec{E}_{st} = \gamma \vec{E}_{st} \quad (2.67)$$

tj. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru pro elektrolyty.

3. Elektrolýza

Pohyby iontů k elektrodám.

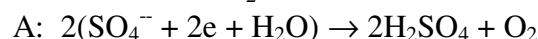
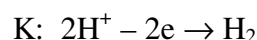
Neutralizace iontů – předání náboje elektrodám,

Elektrolýza – vyloučení iontů na elektrodách, chemická reakce s materiálem elektrod, reakce s elektrolytem ...

Průchod elektrického proudu v elektrolytu je zprostředkován anionty a kationty.

Příklad 1: Vodný roztok kyseliny sírové H_2SO_4 a Pt elektrody,
disociace SO_4^- (anionty) a H^+ (kationty),

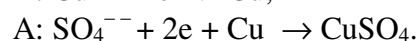
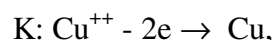
Po připojení na napětí: kationty se neutralizují na katodě,
anionty na anodě (chemicky reagují s vodou, s Pt nemohou).



Na katodě se vylučuje vodík, na anodě kyslík (v elektrolytu ubývá molekul vody) $\Rightarrow$ elektrolytický rozklad vody

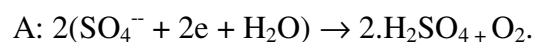
Příklad 2: vodný roztok modré skalice (CuSO_4), A – Cu, K – C),
disociace Cu^{++} a SO_4^- .

Po připojení napětí: Cu^{++} se neutralizují na katodě (vyloučí se jako atomy mědi),
 SO_4^- reagují s anodou (molekula CuSO_4).



Měď ubývá na anodě a počet molekul modré skalice a ani molekul vody se nemění.

Zaměníme-li Cu elektrodu za C nebo Pt elektrodu, ionty SO_4^- nereagují s materiálem elektrod, ale s vodou v okolí anody podle schématu



V elektrolytu ubývá mědi a přibývá molekul kyseliny sírové, jejíž molekuly disociují a dochází rovněž k elektrolytickému rozkladu vody.

4. Faradayovy zákony elektrolýzy

Uvažujme jednu elektrodu (katodu), na které se při elektrolýze za 1 s vyloučí p iontů látky.

Označme z mocenství iontu,
 ze náboj iontu,
 m_0 hmotnost iontu,
 M hmotnost vyloučené látky za dobu t ,
 I proud procházející elektrolytem.

Platí $M = pm_0t$,
 $I = zep$.

Vydělením obou rovnic a po úpravě pro M

$$M = \frac{m_0}{ze} It = AIt = AQ, \quad (2.68)$$

kde $Q = It$ je celkový náboj prošlý elektrolytem za čas t ,
 A je **elektrochemický ekvivalent**

$$A = \frac{m_0}{ze} . \quad (2.69)$$

Jednotkou A je $\text{kg} \cdot \text{C}^{-1}$.

1. Faradayův zákon elektrolýzy – hmotnost vyloučené látky je přímo úměrná náboji, který prošel elektrolytem

Jiné vyjádření A – rozšíření zlomku Avogadrovou konstantou ($N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$)

$$A = \frac{N_A m_0}{N_A e z} = \frac{M_m}{F z} , \quad (2.70)$$

kde M_m je molární hmotnost, F je **Faradayova konstanta**

$$F = N_A e = 9,64867 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} . \quad (2.71)$$

F vyjadřuje náboj, kterým by se vyloučil jeden mol jednomocné látky

Vyjádření Faradayova zákona (2.68)

$$M = \frac{M_m}{F z} I t . \quad (2.72)$$

Projde-li dvěma elektrolyty při elektrolýze týž náboj $Q = It$, pak podíl hmotností vyloučených látek je

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\frac{M_{m1}}{F z_1} Q}{\frac{M_{m2}}{F z_2} Q} = \frac{\frac{M_{m1}}{z_1}}{\frac{M_{m2}}{z_2}} = \frac{B_1}{B_2} \quad (2.73)$$

B_1 a B_2 jsou kilovaly (kilogramekvivalenty) příslušných látek.

2. Faradayův zákon – hmotnosti látek vyloučených týmž nábojem jsou v poměru jejich kilovalů.

5. Elektrodotový potenciál

Při transportu iontů mezi elektrodou a elektrolytem po čase nastane **dynamická rovnováha** – počet iontů přicházejících z elektrody do elektrolytu bude stejný jako počet iontů vracejících se zpět na elektrodu.

Elektroda se rozpouští – kationty katody přechází do elektrolytu – **elektroda se nabíjí záporně** pokud kationty přechází z elektrolytu na elektrodu – **elektroda se nabíjí kladně**,

Poznámka: mechanismus závisí na *chemickém složení elektrody, elektrolytu, rozdílem potenciálů*.

Elektrodotový potenciál – potenciál elektrody vzhledem k elektrolytu.

Standardní elektroda – (např. vodíková) vzhledem k této elektrodě měříme potenciály ostatních elektrod (standardní elektrodotové potenciály).

Tabulka 1: Standardní elektrodotové potenciály různých kovů

Elektroda	Standardní elektrodotový potenciál [V]	Elektroda	Standardní elektrodotový potenciál [V]
-----------	--	-----------	--

Li	-3,04	H	0,000
Al	-1,66	Cu	+0,34
Zn	-0,76	Ag	+0,80
Fe	-0,44	Hg	+0,80
Cd	-0,40	Au	+1,50
Ni	-0,25	Pt	+1,60
Pb	-0,12	O	+1,68

Skutečnost, že elektrody různých kovů mají různý elektrodový potenciál, umožňuje konstrukci galvanických článků.

6. Polarizace elektrod

Nastane tehdy, když původně stejné elektrody (např. C) se stanou elektrodami z různých materiálů.

Polarizační napětí – napětí naměřené mezi zpolarizovanými elektrodami.

Polarizační napětí při elektrolýze působí proti napětí přiloženého zdroje.

Aby elektrolytem procházel elektrický proud, musí být napětí připojeného zdroje větší než polarizační napětí mezi elektrodami.

- nepříznivý vliv u galvanických článků,
- + záměrné vyvolání polarizace elektrod u akumulátorů.

7. Galvanické články a akumulátory

18. století A. Volta – **Voltův galvanický článek**.

Anoda – Cu, katoda – Zn ve vodném roztoku H_2SO_4 – $U_e \approx 1,05 \text{ V}$.

(odběrem proudu dochází k polarizaci elektrod, anoda se pokryje bublinkami H_2 a na katodě je O_2 . Polarizací elektrod napětí klesne téměř na 0.

Danielův článek – potlačení polarizace elektrod (Cu je v CuSO_4 vodném roztoku, Zn je v ZnSO_4 vodném roztoku.) Elektrolyty jsou oddělené polopropustnou vrstvou propouštějící jen ionty SO_4^{2-} .

Při zátěži Cu z elektrolytu na Cu anodu, Zn z elektrody do elektrolytu (složení elektrod se nemění).

Monočlánky a suché baterie – úpravou **Laclanchéova článku**.

obr. 2.42 a

Kladnou elektrodu tvoří uhlíková tyčinka.

Zápornou elektrodu Zn nádobka, elektrolyt – vodný roztok salmiaku (NH_4Cl).

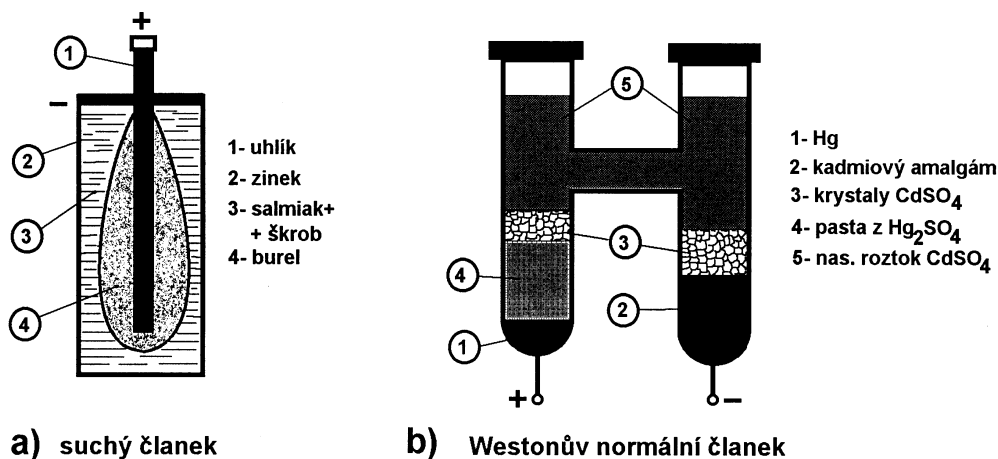
Zabránění polarizace elektrod – burel a tuha.

EMN článku = 1,5 V,

Plochá baterie – 3 články sériově = 4,5 V.

Westonův normálový článek – $U_e = 1,017934 \text{ V}$

obr. 2.42 b.



Obr. 2.42.

Článek je **neklopný** (nesmí se promíchat tekutiny),
Měří se s ním v bezproudovém stavu (max. zatížení proudem $I = 1 \mu\text{A}$).

Primární galvanické články – elektrochemické děje jsou v nich nevratné,
Sekundární galvanické články – akumulátory

Akumulátor

využívají se v něm vratné elektrochemické děje, využívá se polarizace elektrod (záměrně se vytváří při nabíjení akumulátoru).

Olověný akumulátor

- Dvě soustavy Pb elektrod.
- Elektrolyt – H_2SO_4 (hustota $1,28 \text{ g.cm}^{-3}$).
- Nabíjení akumulátoru – (+ na +, – na –) předepsaným proudem (katoda se pokryje pórovitým Pb, anoda PbO_2).
- Současně dochází k rozkladu vody (vody ubývá, hustota elektrolytu roste $+0,2 \text{ g.cm}^{-3}$)
- U_e je asi 2 V (při poklesu pod 1,85 je třeba ji nabít).
- Pb akumulátor má velmi malý $R_i < 0,01 \Omega$ (může krátkodobě dodat do obvodu velký proud – startování automobilu).
- Při zkratu však může způsobit požár (roztavením vodičů).
- Účinnost Pb akumulátoru je asi 80%.
- **Kapacita (náboj) akumulátoru** se udává v Ah (jak dlouho můžeme odebírat proud 1 A).

Alkalický oceloniklový akumulátor (NiFe)

- K – Fe, A – Ni, elektrolyt – vodný roztok 21% KOH + 5% LiOH.
- $U_e = 1,3 \text{ V}$,
- při stejné hmotnosti má větší kapacitu,
- 10x delší životnost,
- může po jistou dobu zůstat nenabitý,
- má velký R_i .

Další typy aku: NiCd, HgAg ...

2. 8. VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V PLYNECH. VÝBOJ V PLYNECH

Výboj v plynu – označení pro průchod elektrického proudu plynem.

Za normálních podmínek jsou čisté plyny velmi dobrými izolanty (vzduch obsahuje v 1 cm³ jen 10³ iontů vznikajících vlivem radioaktivního a kosmického záření).

Ionizační činnidla – umělé vytvoření nositelů proudu (zahřátím, působením UV záření, RTG záření, radioaktivního záření apod.).

Nesamostatné vedení proudu v plynu – vedení podmíněné působením vnějšího ionizačního činnidla.

Samostatné vedení proudu – nositelé proudu vznikají v plynu vlivem procesů vyvolaných elektrickým polem.

1. Ionizace, rekombinace a neutralizace iontů

Na vedení proudu v plynu se podílí kladné a záporné ionty a volné elektrony.

Ionizační energie – energie W_i potřebná na odtržení elektronu z atomu nebo molekuly.

Ionizační energie se často vyjadřuje pomocí elementárního náboje e a **ionizačního potenciálu** φ_i

$$W_i = e\varphi_i, \text{ tedy } \varphi_i = \frac{W_i}{e}. \quad (2.74)$$

Tabulka 2. První ionizační potenciály některých plynů

Prvek	φ_i [V]	Prvek	φ_i [V]
H	13,6	Ne	21,56
He	24,56	Kr	14,0
O	13,62	Xe	12,13
Ar	15,76	Na	5,14

Kladně a záporně nabitě částice vznikají ve dvojicích (počet se rovná počtu ionizovaných atomů nebo molekul)

$$n_+ = n_- = n, \quad (2.75)$$

n – počet ionizovaných molekul v 1 m³.

Rekombinace iontů – vytvoření neutrálního iontu nebo molekuly po setkání + a – iontu nebo + iontu a elektronu.

Předpokládáme, že za dobu dt ubude rekombinací v 1 m³ – dn párů iontů.

$$-\frac{dn}{dt} = \gamma_r n_+ n_- = \gamma_r n^2, \quad (2.76)$$

koeficient rekombinace – konstanta úměrnosti γ

separací proměnných $-\frac{dn}{n^2} = \gamma_r dt$,

integrací $\frac{1}{n} = \gamma_r t + C$.

Integrační konstanta je určena z počáteční podmínky:

pro $t = 0$ je počet + a – iontů $n_0 \Rightarrow C = 1/n_0$

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 \gamma_r t}. \quad (2.77)$$

Rychlost úbytku iontů se zvyšuje s *časem* a závisí na *koeficientu rekombinace*, který závisí zejména na tlaku plynu (nízký tlak $\Rightarrow$ prodloužení střední volné dráhy iontů $\Rightarrow$ snížení pravděpodobnosti setkání).

Působením elektrického pole jsou ionty urychlovány elektrickým polem a zkracuje se tak doba interakce mezi ionty.

Rovnovážná koncentrace iontů (**vzniká** Δn_i párů iontů v 1m^3 za 1 sekundu, **zaniká**

rekombinací γn^2 párů iontů

pro ustálený stav platí

$$\Delta n_i = \gamma n^2. \quad (2.78)$$

Rovnovážná koncentrace iontů (bez elektrického pole)

$$n = \sqrt{\frac{\Delta n_i}{\gamma_r}}. \quad (2.79)$$

Neutralizace iontů – úbytek iontů při výboji odevzdáním náboje iontů na elektrodách.

2. Nesamostatný výboj v plynu

Uvažujme 2 elektrody ve vzájemné vzdálenosti d o ploše desek S s přiloženým napětím U .

Úbytek Δn_j párů iontů vlivem neutralizace.

Na celé výbojové dráze mezi elektrodami ubude $\Delta n_j S d$ párů iontů.

Proud I procházející plynem

$$I = \Delta n_j S d e,$$

odtud

$$\Delta n_j = \frac{I}{S d e} = \frac{J}{d e}. \quad (2.80)$$

V plynu nastává ionizace, rekombinace i neutralizace a pro ustálený stav platí

$$\Delta n_i = \Delta n_r + \Delta n_j,$$

po dosazení

$$\Delta n_i = \gamma_r n^2 + \frac{J}{e d}. \quad (2.81)$$

Zavedením **pohyblivosti iontů** u_+ a u_- vyjádříme hustotu proudu J podobně jako u elektrolytů

$$\vec{J} = e n (u_+ + u_-) \vec{E}. \quad (2.82)$$

a) **Nesamostatný výboj v slabém elektrickém poli**

Rychlost iontů je malá – rekombinace převažuje nad neutralizací (zanedbáme druhý člen v 2.81).

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru

$$\vec{J} = e \sqrt{\frac{\Delta n_i}{\gamma_r}} (u_+ + u_-) \vec{E} = \gamma \vec{E}. \quad (2.83)$$

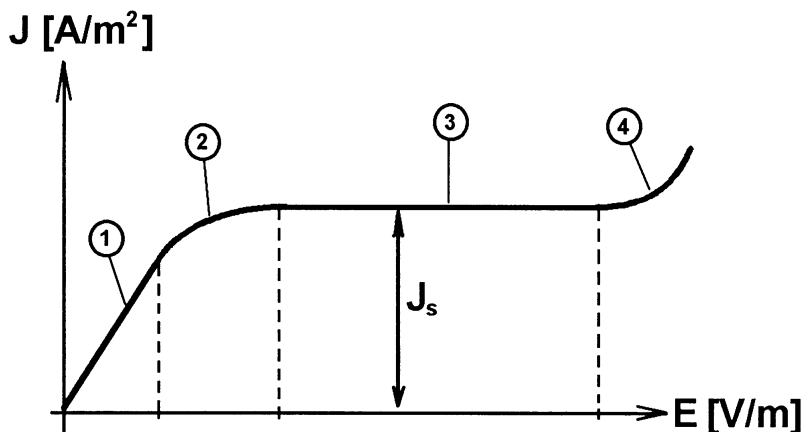
b) **Nesamostatný výboj v silném elektrickém poli**

Rychlost iontů je relativně velká – malá pravděpodobnost rekombinace (γ_r je malé) zanedbáme první člen v 2.81

$$J = \Delta n_i e d. \quad (2.84)$$

Hustota nasyceného proudu J_s – největší hodnota hustoty proudu při daném působení ionizačního činidla.

Závislost hustoty proudu J na intenzitě elektrického pole E při působení daného ionizačního činidla (obr.2.43).



Obr. 2.43.

Oblast 1 – platnost Ohmova zákona,

Oblast 2 – s rostoucí intenzitou E přestává uplatňování rekombinace iontů,

Oblast 3 – oblast nasyceného proudu,

Oblast 4 – přechod v samostatný výboj – ionty v plynu vznikají působením elektrického pole.

3. Samostatný výboj. Ionizace nárazem

Ionizace nárazem – vznik iontů při srážce elektronů urychlených elektrickým polem s neutrálním atomem nebo molekulou.

kinetická energie elektronu $W_k > W_i$,

pokud $W_k < W_i$ dostane se atom do **vybuzeného stavu** o energiích $W_1, W_2, \dots < W_i$.

Krátká doba života – 10^{-8} s a následný přechod do základního stavu doprovázený vyzářením fotonu.

fotoionizace – foton UV ionizuje další molekulu plynu,
– foton viditelného záření = světelné efekty.

Při dostatečně velkém napětí mezi elektrodami přechází nesamostatný výboj v samostatný (lavinovitá tvorba elektronů).

Rovinou ve vzdálenosti x projde za 1 sekundu N elektronů ($x + dx \Rightarrow N + dN$)

pro dN platí $dN = N\alpha dx$.

α – 1. Townsendův koeficient

Po integraci

$$N = N_0 e^{\alpha x} \quad (2.85)$$

počet elektronů roste exponenciálně s rostoucím x

Na anodu dopadne $N_a = N_0 e^{\alpha d}$. (2.86)

Plynem prochází proud

$$I = eN_a = eN_0 e^{\alpha d}.$$

Podmínka pro ustálený stav:

- N_0 elektronů emitovaných z katody vytvoří na dráze k anodě za 1 sekundu $N_a - N_0$ nových kladných iontů přitahovaných katodou.
- Pro udržení samostatného výboje musí za 1 sekundu vyvolat emisi N_0 nových elektronů z katody.
- Podmínka udržení samostatného výboje:

$$\beta(N_a - N_0) = N_0,$$

dosazením za N_a $\beta(e^{\alpha d} - 1) = 1.$

β – koeficient počtu emitovaných elektronů k počtu dopadajících kladných iontů.

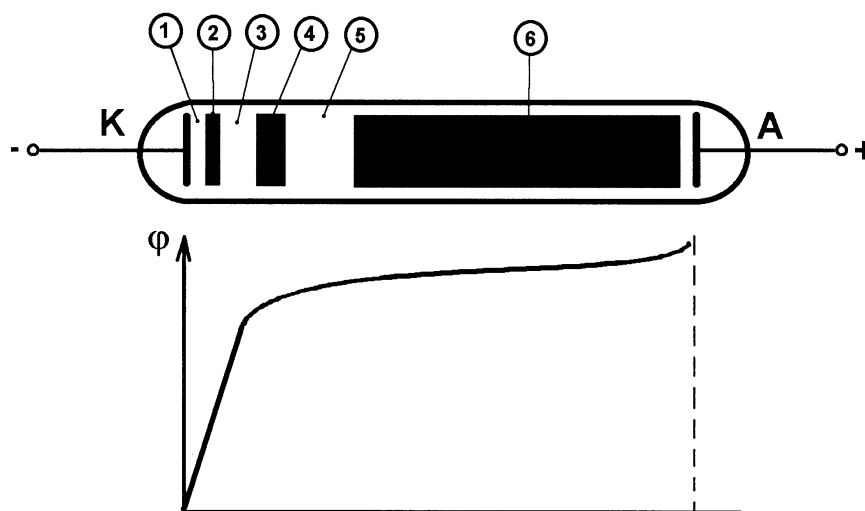
4. Doutnavý výboj

Nastává při nízkém tlaku a napětí řádově 1000 V.

1000 Pa – provazcový výboj mezi oběma elektrodami,

1500 Pa – rozšíření na celý průřez trubice,

700 Pa – **doutnavý výboj** (obr.2.44).



Obr. 2.44.

Oblasti doutnavého výboje:

1. **Astonův tmavý prostor** – kinetická energie elektronů z katody nestačí na ionizaci ani na převedení atomů plynu do excitovaného stavu.
2. **Svítící katodová vrstva** – kinetická energie elektronů z katody stačí na převedení atomů plynu do excitovaného stavu, ale nedostačuje na ionizaci.
3. **Crookesův tmavý prostor** – značné urychlení elektronů vysokým gradientem potenciálu
4. **Doutnavé katodové světlo**
5. **Faradayův tmavý prostor**
6. **Anodový sloupec.**

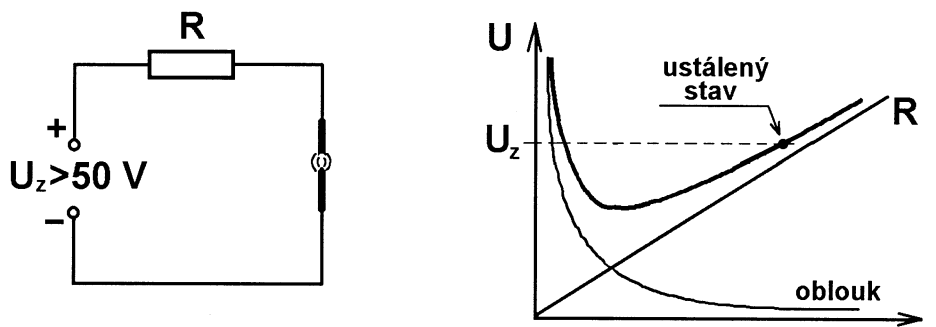
Poznámka:

- Při malé vzdálenosti anody od katody (doutnavky) svítí jen katodová svítící vrstva.
- Ve výbojkách pro reklamní účely (velká vzdálenost) svítí anodový sloupec.
- V zářivkách probíhá výboj ve směsi argonu a rtuťových par, emitované záření obsahuje UV složku, která budí luminiscenci luminoforu $\Rightarrow$ bílé světlo.

5. Obloukový výboj

Vzniká mezi C nebo kovovými elektrodami při napětí $U_z > 50 \text{ V}$.
Vysoká teplota plazmatu mezi elektrodami – 6000 K a více.

- Elektrický oblouk má záporný diferenciální odpor R_d , (při zvyšování proudu klesá napětí a oblouk by se přerušil).
- Je nutné připojit stabilizační odpor $R > R_d$ (obr. 2.45).
- K udržení stabilní formy obloukového výboje je nutný minimální proud 5 A až 10 A (pro svařování obloukem 100 A až 300 A).
- Obloukový výboj může probíhat za normálních atm. tlaků i za zředěného tlaku (několik 100 Pa) i za vysokého tlaku (do 10^8).



Obr. 2.45.

Použití: při svařování, dnes již zřídka k osvětlení.

6. Jiskrový výboj

Většinou k němu dochází ve vzduchu za atm. tlaku (průraz vzduchové vrstvy po překročení **elektrické pevnosti** vzduchu $E_p = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$).

Průrazné napětí U_p – napětí mezi elektrodami při překročení elektrické pevnosti.

V přírodě je jiskrovým výbojem blesk (délka jiskry až 10 km, průřez výbojového kanálu 0,4 m, doba trvání 10^{-4} s a okamžitá hodnota proudu 10^5 A , napětí mezi místy, kde blesk vznikne až 10^8 V).

V silně nehomogenním elektrickém poli (v okolí hrotů) je intenzita řádově $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ a vzniká **koronový výboj**.

2.9. ELEKTRICKÝ PROUD VE VAKUU

Vakuum:

- nízké ($10^5 \text{ Pa} - 10^2 \text{ Pa}$),
- střední ($10^2 \text{ Pa} - 10^{-1} \text{ Pa}$),
- vysoké ($10^{-1} \text{ Pa} - 10^{-6} \text{ Pa}$),
- ultravysoké (10^{-6} Pa a méně).

Vakuum je velmi dobrým izolantem (neobsahuje téměř žádné nabitě částice).

Průchod elektrického proudu vakuem je možný **emisí elektronů z kovů**.

Proud ve vakuu = **proud konvekční** (je ovlivňován jen elektrickými a magnetickými poli).

Výstupní práce A_v – energie nutná k uvolnění elektronu z kovu

Druhy emise elektronů z kovu:

1. tepelná emise (termoemise),
2. fotoemise (vyvolaná absorpcí fotonu),
3. sekundární emise (vyvolaná dopadem rychlých elektronů nebo iontů),
4. autoemise neboli studená emise (vyvolaná silným elektrickým polem).

1. Tepelná emise elektronů a její využití

Katoda žhavená elektrickým proudem:

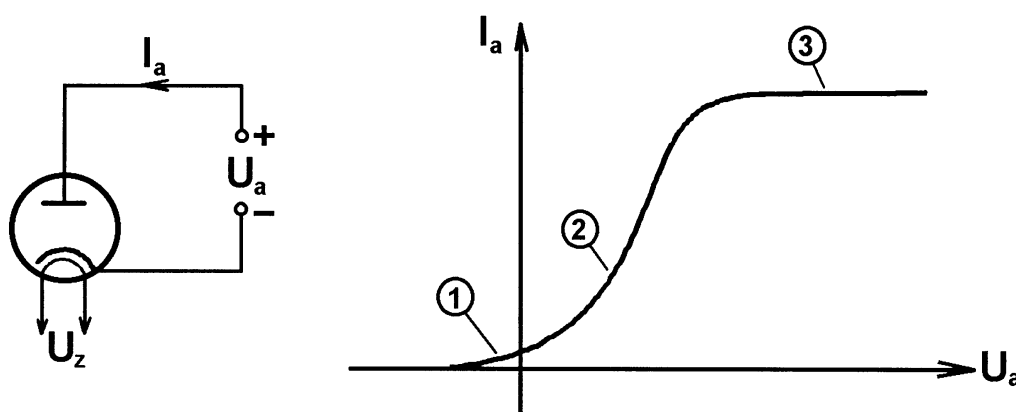
- přímo žhavená – W vlákno zahřáté procházejícím proudem a emitující elektrony,
- nepřímo žhavená – rozžhavené vlákno oddělené izolační vrstvou od válečku pokrytého oxidem baria, thoria nebo stroncia (snížení A_v).

Vakuová dioda

Při dostatečně vysokém žhavicím napětí U_z se kolem katody vytvoří **záporný prostorový náboj**. (Emisi elektronů se katoda nabíjí kladně a část elektronů je tak přitažena zpět na katodu).

Připojením anodového napětí U_a mezi katodu a anodu ($\varphi_a > \varphi_b$) jsou elektrony přitahovány k anodě a anodovým obvodem prochází proud I_a . (obr.2.46a).

Závislost I_a na U_a vyjadřuje V-A charakteristika vakuové diody (obr. 2.46b):



Obr. 2.46.

1. **Oblast náběhového proudu** – některé elektrony překonají (při malém anodovém napětí) záporný potenciál anody a proniknou na anodu.
2. **Oblast prostorového náboje** – elektrony jsou anodou přitahovány tím víc, čím je větší anodové napětí.

$$I_a = kU_a^{\frac{3}{2}}. \quad (2.88)$$

3. **Oblast nasyceného proudu** – zvyšováním anodového napětí oblak elektronů kolem katody zanikne (vyčerpá se).

Zvýšení hodnoty nasyceného proudu lze dosáhnout zvětšením počtu emitovaných elektronů (zvětšením teploty katody).

Richardsonův–Dushmanův vztah (závislost J_s na T)

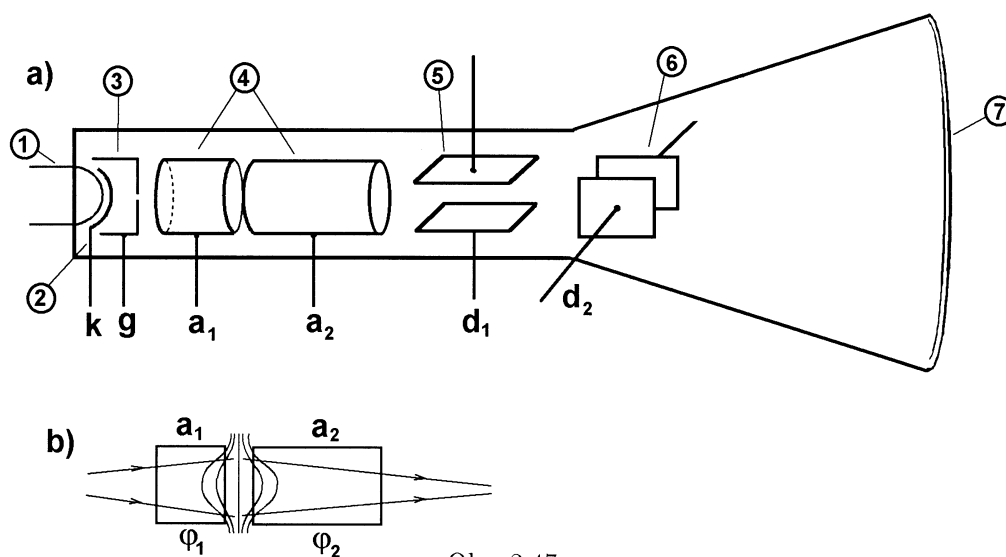
$$J_s = BT^2 e^{\frac{A_v}{kT}}, \quad (2.89)$$

kde B – emisní konstanta daného kovu,
 k – Boltzmannova konstanta,
 T – absolutní teplota katody.
 B pro různé kovy v mezích $3 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5 \text{ A.m.K}^{-2}$ (zjištěno experimentálně).

Trioda

Elektronka s třetí elektrodou (mřížkou).
 Změnou potenciálu mřížky se mění anodový proud.
 Dnes využití např. v obvodech vysílačů.

Termoemise se využívá stále v *obrazovkách, rentgenkách, elektronových mikroskopech ...*



Obr. 2.47.

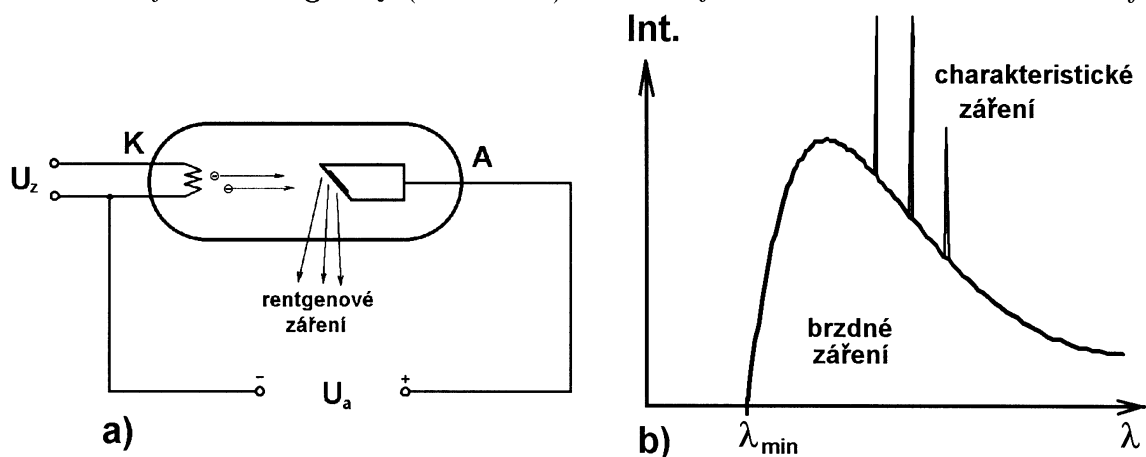
Obrazovka osciloskopu s elektrostatickou fokusací a vychylváním (obr. 2.47a) :

1. žhavicí vlákno,
2. katoda,
3. Wehneltův válec (jeho potenciálem se mění počet elektronů a tím jas stopy),
4. **elektrostatická čočka** (ovlivňování svazku elektronů potenciálem anod a_1 a a_2) ($\varphi_2 > \varphi_1$),
5. vertikálně vychylující destičky,
6. horizontálně vychylující destičky,
7. luminiscenční stínítko.

V televizních obrazovkách se svazek vychyluje magnetickým polem

Rentgenka

Speciálně konstruované vakuové trubice s urychlovacím napětím větším jak 10 kV (obr.2.48a).
 1895 objev Röntgenova záření (X-ray) W.C.Röntgenem.



Obr. 2.48.

Kinetická energie urychleného elektronu se zčásti přemění na anodě na energii rentgenového záření a zčásti na vnitřní energii anody (zvýšená teplota $\Rightarrow$ nutnost chlazení).
Napětí mezi anodou a katodou je vysoké – 10^5 V.

Pro energii fotonů rtg. záření platí

$$W_f = hf = h \frac{c}{\lambda}, \quad (2.90)$$

kde $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s je Planckova konstanta,
 f – frekvence záření,
 c – rychlost světla,
 λ – vlnová délka elektromagnetického záření.

Kinetická energie urychleného elektronu mezi anodou a katodou

$$W_e = \frac{1}{2}mv^2 = eU_a. \quad (2.91)$$

- Při prudkém zabrzdění elektronu se celá kinetická energie přemění v energii fotonu rentgenového záření ($W_f = W_e$).

Krátkovlnná mez rentgenového záření

$$h \frac{c}{\lambda_{\min}} = \frac{hc}{eU_a}. \quad (2.92)$$

- Elektron je brzděn postupně $\Rightarrow$ **brzdové rentgenové záření**, které má spojité spektrum končící u $\lambda_{\min}$.
- **Charakteristické záření** – čárové spektrum (závisí na materiálu anody).

Tvrdé rentgenové záření – rtg. záření o krátkých vlnových délkách (větší W).

Měkké rentgenové záření – rtg. záření o delších vlnových délkách (menší W).

"Tvrlost" záření se nastavuje napětím U_a mezi anodou a katodou.

Využití rtg. záření v lékařské diagnostice, průmyslové defektoskopii při hledání vad, stanovení struktury krystalických materiálů apod.

Elektronové mikroskopy – popis později (rovněž využití magnetického pole)

2. Fotoemise elektronů a její užití

Uvolnění elektronů z povrchu kovů účinkem dopadajícího elektromagnetického záření vhodné vlnové délky.

Teoretické zdůvodnění A. Einsteinem (Nobelova cena 1921).

Světlo má kvantovou povahu a šíří se v kvantech o energii $W_f = hf$ nazývaných **fotony**.

Einsteinova rovnice pro vnější fotoefekt

$$hf = A_v + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.93)$$

kde h je Planckova konstanta,
 f kmitočet elektromagnetického záření (světla),
 A_v výstupní práce,
 m hmotnost elektronu,
 v rychlost elektronu.

Mezní frekvence f_m – celá energie fotonu se spotřebuje na výstupní práci A_v (elektron má nulovou rychlost)

$$hf_m = A_v,$$

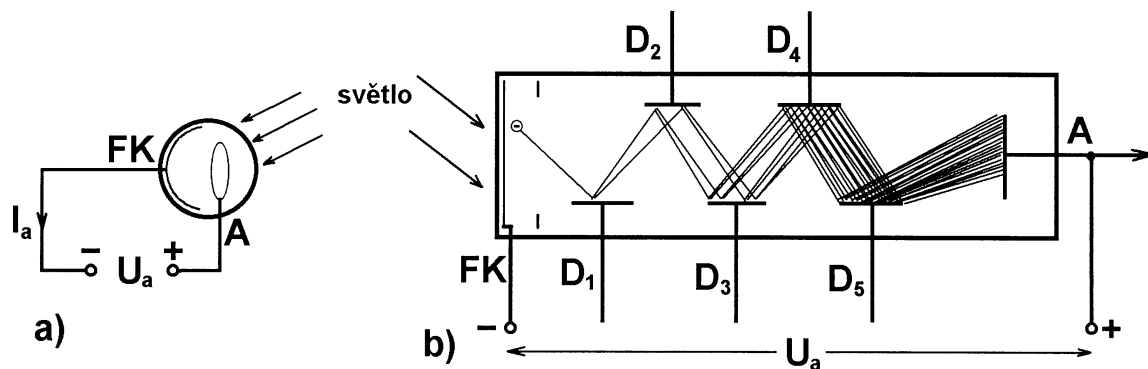
upravená fotoelektrická rovnice

$$hf = hf_m + \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.94)$$

V případě, že f dopadajícího světla $< f_m$ fotoemise nenastane.

Vakuová fotonka

skládá se z fotokatody FK a anody A (obr. 2.49a).



Obr. 2.49.

- *Fotonka pro viditelnou oblast* – FK tvoří vrstva s nízkou výstupní prací (Cs-Sb, CsO).
- *Fotonka pro UV oblast* má baňka okénko z křemenného skla a FK tvoří vrstvu s větší výstupní prací (Ni, Ag, W).

Fotonásobič (obr.2.49b).

Optoelektronický prvek pro registraci slabých světelných toků.

Spojení vakuové fotonky s násobičem elektronů (činnost založena na **sekundární emisi**).

- Na čelním okénku je nanesena fotokatoda s malou výstupní prací.
- Elektrony jsou urychleny elektrickým polem na další elektrody – **dynody**.

- Dynody (počet 6 – 12) jsou pokryty látkou s malou výstupní prací $\Rightarrow$ každý dopadající elektron vyrazí dalších 3 až 10 sekundárních elektronů.
- Postupným násobením počet elektronů roste až 10^8 – krát.
- Poslední elektroda – anoda zachycuje vynásobený svazek elektronů.

3. STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE

Magnetické jevy známé ze starověku:

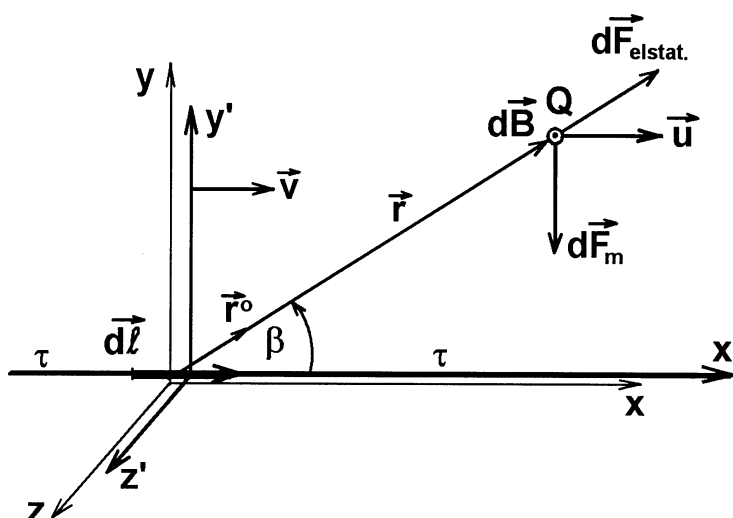
- magnetovec (magnetit, Fe_3O_4) – Aristoteles.

Podle minerálu odvozeny názvy: *Magnetické síly, magnetické pole.*

- 1820 H.Ch. Oersted – v okolí vodiče protékajícího proudem existuje magnetické pole (důkaz magnetkou).

3.1. RELATIVISTICKÉ TRANSFORMACE SÍLY. ZÁKON BIOTŮV–SAVARTŮV–LAPLACEŮV

- Uvažujme inerciální soustavu x, y, z v níž je pozorovatel v klidu (obr. 3.1)



Obr. 3.1.

- Soustava x', y', z' se vůči soustavě x, y, z pohybuje ve směru osy x konstantní rychlostí $\vec{v}$.
- V místě určeném v soustavě x, y, z polohovým vektorem $\vec{r}$ se nachází náboj Q , který se pohybuje ve směru osy x rychlostí $\vec{u}$.
- V soustavě x', y', z' je umístěno v ose x' dlouhé přímé vlákno nabitá nábojem s lineární hustotou τ . Pohyb nabitého vlákna rychlostí $\vec{v}$ vzhledem k pozorovateli představuje proud $I = \tau v$,
- náboj na elementu vlákna dl považujeme za bodový náboj $dQ = \tau dl$.
- V případě, že je náboj v klidu působí elektrostatickou silou

$$d\vec{F}_{elstat} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ Q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl Q}{r^3} \vec{r}.$$

- V případě, že se dQ a Q vůči pozorovateli pohybují (teorie relativity) – transformace $d\vec{F}_{elstat}$ do soustavy pozorovatele
- Pro $v \ll c$ zjednodušený tvar

$$d\vec{F}_m = d\vec{F}_{elstat} + \underbrace{\vec{u} \times \left[\frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{F}_{elstat} \right]}_{\text{magnetická síla}} \quad (3.1)$$

kromě síly elektrostatické tedy působí ještě **síla magnetická** $d\vec{F}_m$

$$d\vec{F}_m = \vec{u} \times \left[\frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{F}_{elstat.} \right].$$

Úpravou

$$d\vec{F}_m = \vec{u} \times \left(\frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{F}_{elstat.} \right) = \vec{u} \times \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQQ}{r^3} \vec{r}.$$

Dosazením za $dQ = \tau dl$ a úpravou

$$d\vec{F}_m = \underbrace{Q\vec{u}}_{\text{char. částice}} \times \underbrace{\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^3} \vec{r}}_{\text{char. mag. pole}}. \quad (3.2)$$

druhý člen charakterizuje magnetické pole – **magnetická indukce** $\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\tau dl}{r^3} (\vec{v} \times \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tau dl}{r^3} (\vec{v} \times \vec{r}).$$

Konstanta $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ – **permeabilita vakua**.

Další úpravy: výpočet $\vec{v} \times \vec{r}$

$$\vec{v} = \vec{i} v, \quad \vec{r} = \vec{i} x + \vec{j} y,$$

tedy

$$\vec{v} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v & 0 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} v y.$$

Pak

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\tau v k dly}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{k} dl \sin \beta}{r^2},$$

kde $\tau v = I$ a $\frac{v}{r} = \sin \beta$. Poněvadž $\vec{k} dl \sin \beta = d\vec{l} \times \vec{r}_0$, lze psát

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.3)$$

což je **Biotův–Savartův–Laplaceův zákon** – příspěvek k magnetické indukci magnetického pole, který budí element proudovodiče $d\vec{l}$ v bodě určeném polohovým vektorem $\vec{r}$ ($d\vec{B} \perp d\vec{l}, \vec{r}$)

Jednotkou magnetickou indukce je **tesla** (T). Platí $1\text{T} = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Magnetická indukce pole od tenkého vodiče

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.4)$$

Magnetickou sílu $\vec{F}_m$ působící na částici s nábojem Q pohybující se rychlostí $\vec{u}$ v magnetickém poli vodiče s proudem dostaneme integrací vztahu (3.2), tj.

$$\vec{F}_m = Q\vec{u} \times \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = Q\vec{u} \times \vec{B}. \quad (3.5)$$

Působením elektrického i magnetického pole na pohybující se částici

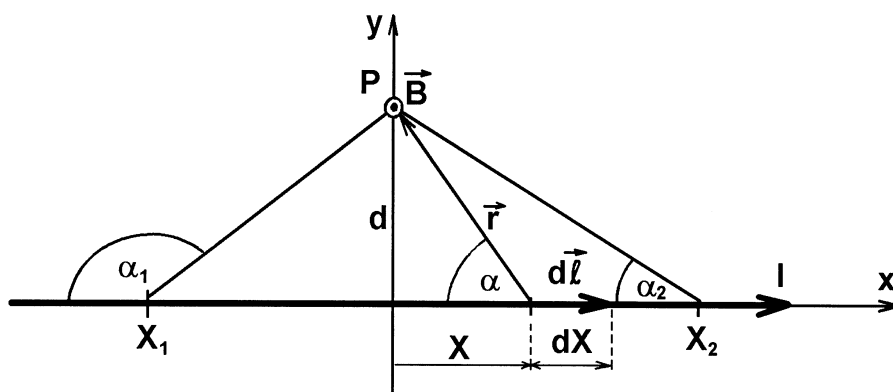
$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{u} \times \vec{B} \quad (3.6)$$

Tato síla se nazývá **Lorentzova síla**.

3.2. UŽITÍ LAPLACEOVA ZÁKONA K VÝPOČTU MAGNETICKÉ INDUKCE MAGNETICKÉHO POLE RŮZNÝCH VODIČŮ S PROUDEM

1. Magnetická indukce od úseku přímého vodiče s proudem

Uspodnění výpočtu – přímý vodič s proudem I je v ose x souřadné soustavy (x, y, z) , obr. 3.2.



Obr. 3.2.

Užitím vztahu (3.4) vypočítáme indukci v bodě P na ose y , při kolmé vzdálenosti od vodiče d .

- Uvažujeme úsek přímého vodiče od X_1 do X_2 .
- Ve vzdálenosti X od počátku je element $d\vec{l} = \vec{i} dl$.
- Polohový vektor $\vec{r} = -\vec{i} X + \vec{j} d$.
- Vektorový součin $d\vec{l} \times \vec{r} = \vec{i} dX \times (-\vec{i} X + \vec{j} d) = \vec{k} d dX$.

Po dosazení (3.4) a integraci

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \vec{k} d \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{(X^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Zavedení substituce

$$\frac{X}{d} = \cot g \alpha, \quad X = d \cot g \alpha, \quad dX = -\frac{d}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Výpočet jmenovatele integrandu

$$(X^2 + d^2)^{3/2} = \left(d^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + d^2 \right)^{3/2} = \left(d^2 \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)^{3/2} = \frac{d^3}{\sin^3 \alpha}.$$

Po dosazení

$$\vec{B} = \vec{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha = \vec{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Vektor $\vec{B}$ je kolmý na rovinu určenou bodem P a proudovodičem.

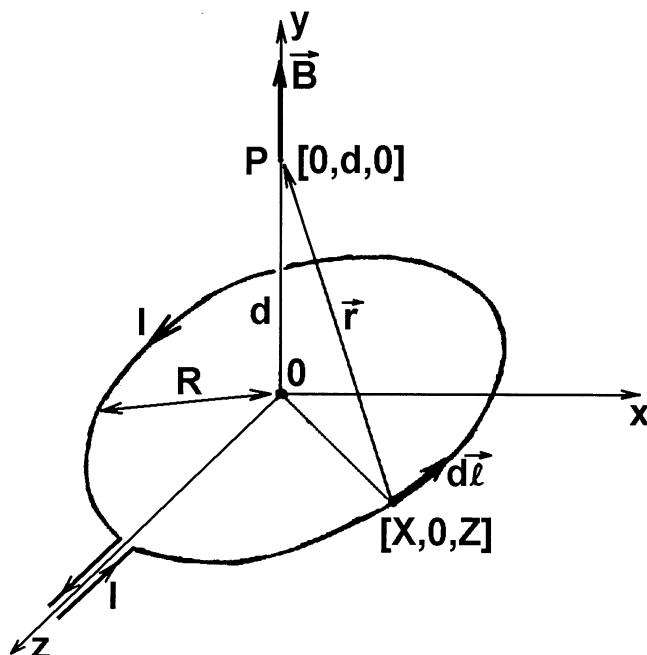
Lze nahradit jednotkový vektor $\vec{k}$ jednotkovým vektorem $\vec{i}_0$ tečny ke kružnici se středem na vodiči (procházející uvažovaným bodem a ležícím v rovině vodiče s proudem)

$$\vec{B} = \vec{i}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad (3.7)$$

Ampérovo pravidlo pravé ruky

2. Magnetická indukce od kruhového závitu s proudem

- Kruhový zívít (R , střed v počátku x, y, z) ležící v rovině (x, z) protékáný proudem I .
- Určujeme $\vec{B}$ v bodě P na ose závitu (z) vzdáleném d od středu (obr.3.3)



Obr. 3.3.

- V bodě na závitu $[X, 0, Z]$ zvolme $d\vec{l}$ orientovaný ve směru I .
- Polohový vektor $\vec{r}$ bodu P vzhledem k $d\vec{l}$ je

$$\vec{r} = -\vec{i}X + \vec{j}d - \vec{k}Z \quad r^3 = (X^2 + d^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}} = (R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}.$$

- Element proudovodiče

$$d\vec{l} = \vec{i}dX + \vec{k}dZ.$$

- Zavedeme polární souřadnice

$$\begin{aligned} X &= R \sin \beta & Z &= R \cos \beta \\ dX &= R \cos \beta d\beta & dZ &= -R \sin \beta d\beta. \end{aligned}$$

- Vektorový součin $d\vec{l} \times \vec{r}$

$$\begin{aligned}
 d\vec{l} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R \cos \beta d\beta & 0 & -R \sin \beta d\beta \\ -R \sin \beta & d & -R \cos \beta \end{vmatrix} = \\
 &= \vec{i} R d \sin \beta d\beta + \underbrace{\vec{j} (R^2 \sin^2 \beta d\beta + R^2 \cos^2 \beta d\beta)}_{R^2 d\beta} + \vec{k} R d \cos \beta d\beta
 \end{aligned}$$

- Dosazením do (3.4) a integrací po délce závitu podle β od 0 do 2π , tj.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\underbrace{\vec{i} R d \int_0^{2\pi} \sin \beta d\beta}_0 + \underbrace{\vec{j} R^2 \int_0^{2\pi} d\beta}_{2\pi} + \underbrace{\vec{k} R d \int_0^{2\pi} \cos \beta d\beta}_0 \right).$$

Pro $\vec{B}$ na ose kruhového závitu v bodě P

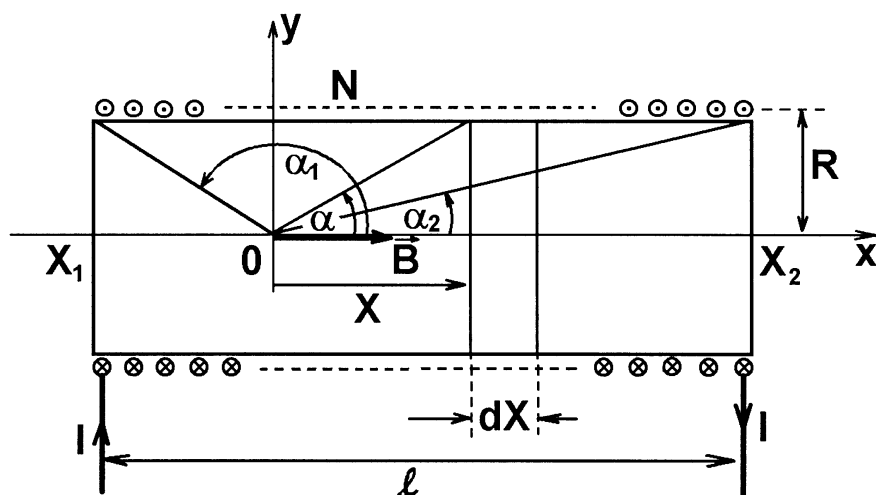
$$\vec{B} = \vec{j} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.9)$$

Pro bod ležící ve středu závitu

$$\vec{B} = \vec{j} \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}. \quad (3.10)$$

3. Magnetická indukce na ose jednovrstvé cívky (solenoidu)

- Parametry solenoidu: l , N , R , I .
- Osu cívky ztotožňujeme s osou x souřadného systému (x, y) a počítáme magnetickou indukci $\vec{B}$ v bodě P na ose cívky v počátku souřadného systému (obr. 3.4).



Obr. 3.4.

- Využijeme výsledek pro kruhový závit (3.9).
- Ve vzdálenosti X od počátku bude element cívky dX .
- Na jednotku délky připadá N/l závitů, takže na délce dX je počet závitů.

$$\frac{N}{l} dX. \quad (\text{bereme jako jeden závit})$$

$$d\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{N}{l} dX.$$

Integrací od X_1 do X_2

$$\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 N}{l} \int_{X_1}^{X_2} \frac{dX}{(R^2 + X^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pro výpočet zavedeme substituci

$$X = R \cot g \alpha, \quad dX = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Dále vypočteme

$$R^2 + X^2 = R^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{R^2}{\sin^2 \alpha}.$$

Po dosazení

$$\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2 N}{l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\frac{R}{\sin^2 \alpha}}{\frac{R^3}{\sin^3 \alpha}} d\alpha = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{IN}{l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha.$$

Po integraci

$$\vec{B} = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (3.11)$$

Diskuse výsledků:

1. pro P uvnitř:

$$\alpha_1 \rightarrow \pi, \alpha_2 \rightarrow 0 \quad \vec{B} = \vec{i} \mu_0 \frac{NI}{l} \quad (3.12)$$

2. pro P na okraji:

$$\alpha_1 \rightarrow \pi, \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \vec{B} = \vec{i} \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{l}$$

poloviční hodnota je způsobena rozptylem magnetického pole

3.3. VLASTNOSTI MAGNETICKÉHO POLE

1. Magnetické indukční čáry

Ztvárnění magnetického pole.

Magnetická indukční čára je orientovaná prostorová křivka, jejíž souhlasně orientovaná tečna v každém jejím bodě má směr vektoru magnetické indukce (orientace pomocí Ampérova pravidla pravé ruky).

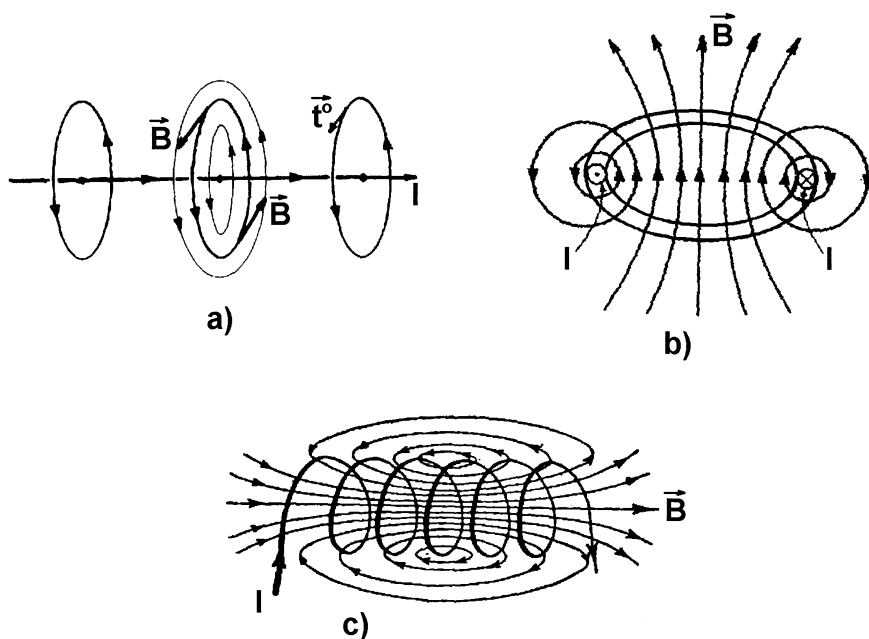
Magnetické čáry jsou *uzavřené křivky*.

Důvod: neexistují zřídla magnetického pole – "magnetické náboje" (v elektrostatickém poli – elektrické náboje).

Obr. 3.5 příklady magnetických indukčních čar pro:

- přímý dlouhý vodič s proudem
- kruhový závit s proudem

c. jednovrstvá cívka s proudem



Obr. 3.5.

2. Magnetický indukční tok Φ_m

Magnetické indukční čáry nedávají informaci o velikosti $\vec{B}$.

Proto se zavádí úmluva o počtu indukčních čar procházejících kolmou jednotkovou plochou

$$\frac{d\Phi_m}{dS_{\perp}} = B.$$

Odtud

$$d\Phi_m = BdS_{\perp} = BdS \cos \alpha,$$

kde α je úhel, který svírá normála k elementu plochy dS ve směru $\vec{B}$.

Zavedením vektoru elementu plochy $d\vec{S} = \vec{n}_0 dS$

lze psát

$$BdS \cos \alpha = \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Tedy

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Magnetický tok celou plochou.

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.13)$$

je **magnetický indukční tok plochou S** (tok vektoru magnetické indukce plochou S).

Jednotkou magnetického indukčního toku je **weber** (1 Wb). $[\Phi_m] = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ Wb}$.

Tok uzavřenou plochou S (vstupující indukční čára musí někde z plochy vystoupit)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.14)$$

tedy – magnetické indukční čáry jsou uzavřené křivky.

Vyjádření (3.14) v **diferenciálním tvaru** s využitím Gaussovy matematické věty

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dV = 0.$$

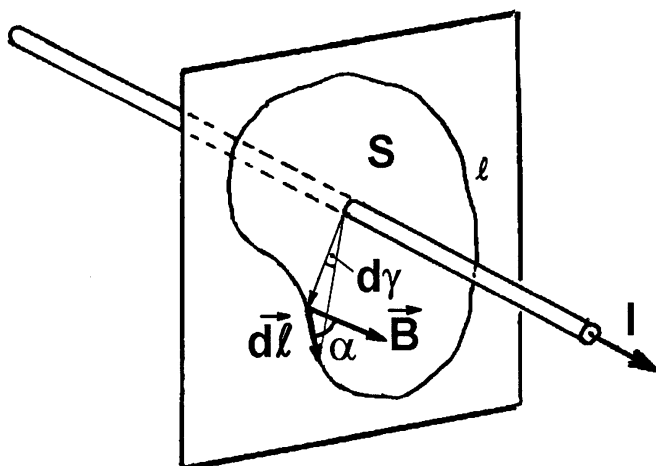
Odtud

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3.15)$$

3. Ampérův zákon (zákon celkového proudu)

Určení účinku $\vec{B}$ po uzavřené křivce l .

- Dlouhý přímý vodič protékáný proudem I .
- V rovině kolmé na vodič volíme libovolnou uzavřenou křivku l (vodič prochází plochou uzavřenou touto křivkou) viz. obr. 3.6.



Obr. 3.6.

- Na l volíme vektorový element $d\vec{l}$ jehož vzdálenost je dána průvodičem $\vec{r}$. Elementu přísluší vzhledem k vodiči středový úhel $d\gamma$

$$d\gamma = \frac{dl \cos \alpha}{r}, \quad \text{takže} \quad dl \cos \alpha = r d\gamma,$$

kde $dl \cos \alpha$ je velikost průmětu elementu $d\vec{l}$ do směru kolmého k $\vec{r}$. (α úhel, který svírají $\vec{B}$ a $d\vec{l}$).

- Hodnota křivkového integrálu

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl \cos \alpha = \oint_l \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} r d\gamma = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int_0^{2\pi} d\gamma.$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (3.16)$$

což je **Ampérův zákon**, který vyjadřuje vlastnost magnetického pole = **pole vírové** (není polem potenciálovým a nelze zavést skalární potenciál).

Zobecnění Ampérova zákona

Pro případ, že plochou prochází více vodičů s proudy $I_1, I_2, \dots, I_n$, bude pro každý platit

$$\oint_l \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_k,$$

kde $\vec{B}_k$ je magnetická indukce od k -tého vodiče s proudem.

Magnetické pole splňuje princip superpozice

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{k=1}^n \vec{B}_k = \vec{B}_{celk}.$$

Můžeme psát

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l \sum_{k=1}^n \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \sum_{k=1}^n \oint_l \vec{B}_k \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k.$$

Označení

$$\sum_{k=1}^n I_k = I_1 + I_2 + \dots + I_n = I_{celk} \text{ (celkový proud).}$$

Dostáváme

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{celk} \quad (3.17)$$

Ampérův zákon (zákon celkového proudu).

Bude-li procházet proud $I_{celk.}$ plochou S ohraničenou křivkou l s hustotou proudu $\vec{J}$, pak

$$I_{celk.} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

tedy

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Použitím Stokesovy věty z vektorové analýzy

$$\int_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

odtud

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (3.18)$$

3.4. což je **Ampérův zákon v diferenciálním tvaru**.

3. 4 SÍLY PŮSOBÍCÍ V MAGNETICKÉM POLI NA NABITÉ ČÁSTICE A VODIČE S PROUDEM

1. Pohyb nabitých částic v magnetickém poli

Na pohybující se náboj Q působí magnetická síla $\vec{F}_m$

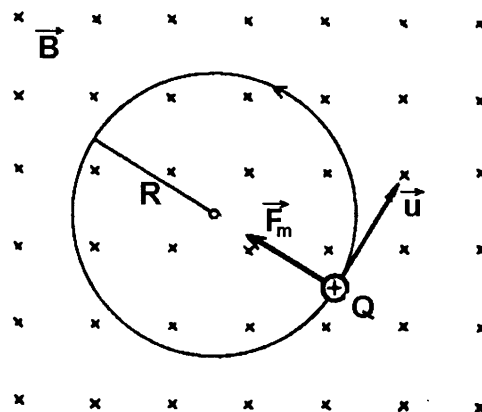
$$\vec{F}_m = Q\vec{u} \times \vec{B},$$

kde $\vec{u}$ je vektor rychlosti pohybu uvažované částice,

$\vec{B}$ magnetická indukce v místě částice.

Směr vektoru magnetické síly je určen vektorovým součinem $\vec{u} \times \vec{B}$ (kolmá k u i B – tedy neovlivní velikost rychlosti u)

- Pohyb v **příčném magnetickém poli** (kolmo k indukčním čarám), obr. 3.7



Obr. 3.7.

Magnetická síla bude v každém bodě dráhy kolmá ke směru její rychlosti $\Rightarrow$ *síla dostředivá*
 $\Rightarrow$ pohyb po kružnici o poloměru

$$F_m = m \frac{u^2}{R}.$$

Při pohybu v příčném magnetickém poli je

$$F_m = |Q|uB.$$

Dosazením $|Q|uB = m \frac{u^2}{R}$ odtud $R = \frac{mu}{|Q|B}.$ (3.19)

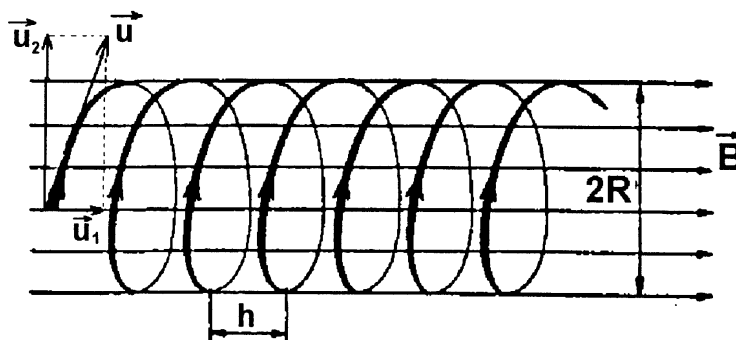
Doba oběhu T po kružnici

$$T = \frac{2\pi R}{u} = 2\pi \frac{m}{|Q|B},$$
 (3.20)

T nezávisí na u ,

závisí na podílu $\frac{|Q|}{m}$ – **měrný náboj částice** a nepřímo úměrně B .

- Příklad, kdy částice vstupuje do pole pod úhlem α (obr. 3.8):



Obr. 3.8.

Vektor rychlosti $\vec{u}$ má složku $\vec{u}_1$ – ve směru magnetických indukčních čar

$\vec{u}_2$ – kolmou na indukční čáry

- Složka $\vec{u}_1$ nezpůsobí žádnou magnetickou sílu ($\vec{u}_1 \times \vec{B} = 0$) $\Rightarrow$ přímočarý rovnoměrný pohyb konstantní rychlostí.
- Složka $\vec{u}_2$ způsobí, že $\vec{F}_m \neq 0$ nutí částici pohybovat se po kružnici

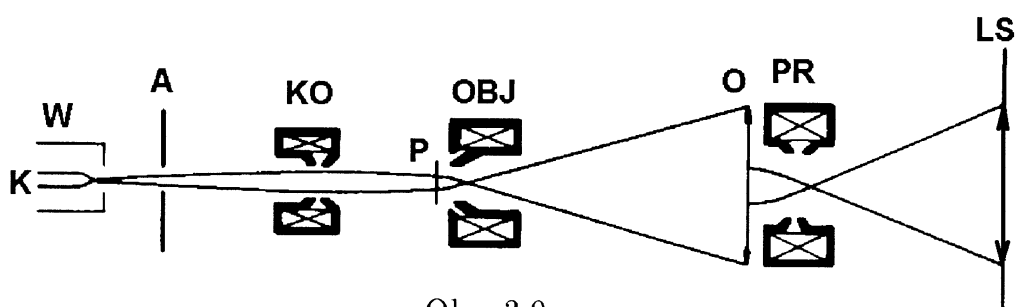
$$R = \frac{mu_2}{|Q|B}.$$

Výsledná trajektorie je **šroubovice** s konstantním stoupáním

$$h = u_1 T = 2\pi \frac{mu_1}{|Q|B}. \quad (3.21)$$

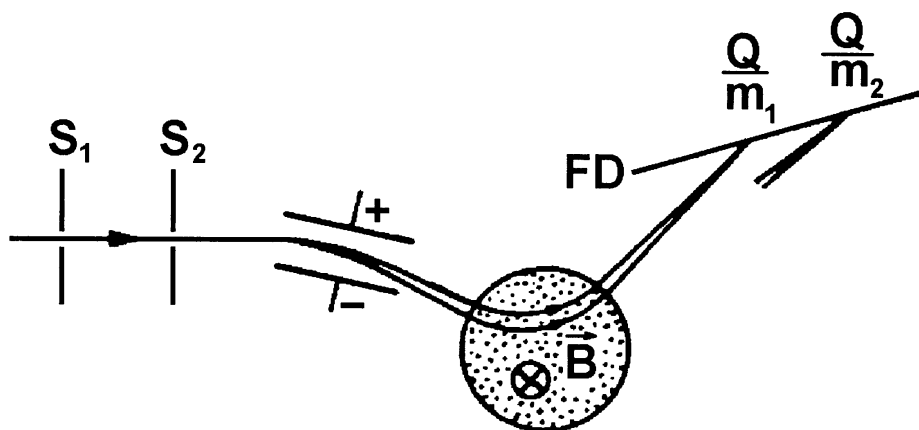
Využití silového působení magnetického pole na nabitě částice:

- *Televizní obrazovka*
- *Elektronový mikroskop* (obr. 3.9)



Obr. 3.9.

- *Hmotnostní spektrograf*, obr.3. 10



Obr. 3.10.

2. Síla působící v magnetickém poli na vodič s proudem

Působení magnetické síly na nosiče náboje, které se ve vodiči uspořádaně pohybují.

U kovů – působení na volné elektrony – přenos na celý vodič.

Příklad přímého vodiče s proudem I v magnetickém poli $\vec{B}$.

n_0 – počet volných nosičů náboje v jednotkovém objemu,

q_0 – náboj částice,

dl – element vodiče,

$dS_{\perp}$ – kolmý průřez vodiče,

$dV = S_{\perp} dl$ – objem elementu vodiče,

dQ – náboj nosičů v elementu

$$dQ = n_0 q_0 dV = n_0 q_0 S_{\perp} dl.$$

Síla působící na náboj dQ

$$d\vec{F}_m = dQ \vec{v}_p \times \vec{B} = n_0 q_0 S_{\perp} dl \vec{v}_p \times \vec{B},$$

$n_0 q_0 \vec{v}_p = \vec{J}$ – hustota proudu ve vodiči,

$|\vec{J} S_{\perp}| = I$ – proud ve vodiči,

Zavedení proudu I v podobě vektorového elementu $d\vec{l}$ orientovaného ve směru hustoty proudu $\vec{J}$.

Pak
$$d\vec{F}_m = S_{\perp} dl \vec{J} \times \vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.22)$$

Z toho plyne, že síla působící v magnetickém poli na element proudovodiče je kolmá na tento element $d\vec{l}$ i na $\vec{B}$.

Integrací dostaneme sílu na celou délku vodiče

$$\vec{F}_m = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (3.23)$$

$\vec{F}_m = I \vec{l} \times \vec{B}$, velikost této síly $F_m = IlB \sin \alpha$,

kde α – úhel, který svírá vodič se směrem magnetických indukčních čar.

Pro:

$\alpha = 0$ na vodič nepůsobí síla,

$\alpha = 90^\circ$ síla je maximální.

Směr síly působící na přímý vodič s proudem v homogenním magnetickém poli určíme

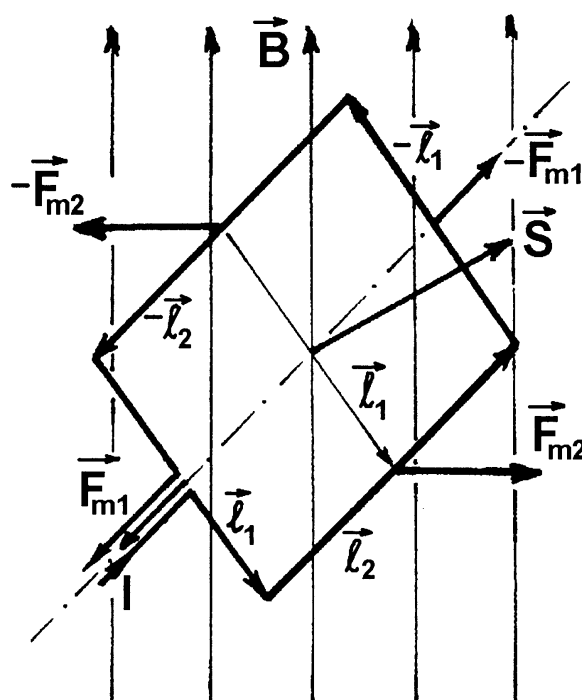
Flemingovým pravidlem levé ruky (prsty – směr proudu, magn. indukční čáry – do dlaně, vztyčený palec – směr síly $\vec{F}_m$).

3. Závit s proudem v magnetickém poli. Magnetický moment.

Uvažujme obdélníkový závit podle obr. 3.11.

- Na stranu $\vec{l}_1$ a $-\vec{l}_1$ působí magnetické síly $\vec{F}_{m1}$ a $-\vec{F}_{m1}$ (leží v přímce, v ose otáčení závitů) – jejich výslednice i moment jsou nulové.
- Na strany $\vec{l}_{21}$ a $-\vec{l}_2$ působí magnetické síly $\vec{F}_{m2}$ a $-\vec{F}_{m2}$ (tvoří dvojici sil)

Tyto síly se snaží závit otočit tak, aby vektor plochy závitu $\vec{S}$ zaujal směr $\vec{B}$.



Obr. 3.11.

$$\vec{F}_{m2} = I\vec{l}_2 \times \vec{B}.$$

rameno dvojice uvažovaných sil je $\vec{l}_1$

Moment dvojice sil je

$$\vec{M} = \vec{l}_1 \times \vec{F}_{m2} = I\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 \times \vec{B}.$$

Vektorový součin

$$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \vec{S} \quad \text{-- vektor plochy závitu,}$$

takže

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}. \quad (3.25)$$

Ampérův magnetický moment

$$\vec{m}_A = I\vec{S}. \quad (3.26)$$

Takže pro moment dvojice sil působících na závit s proudem v magnetickém poli

$$\vec{M} = \vec{m}_A \times \vec{B}. \quad (3.27)$$

Jednotkou Ampérova magnetického momentu $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Coulombův magnetický moment

$$\vec{m}_C = \mu_0 I\vec{S}. \quad (3.28)$$

Jednotkou je $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{T} = \text{Wb} \cdot \text{m}$.

Nenulový magnetický moment má každý zdroj magnetického pole.

Platí to i pro atomy a molekuly a elementární částice.

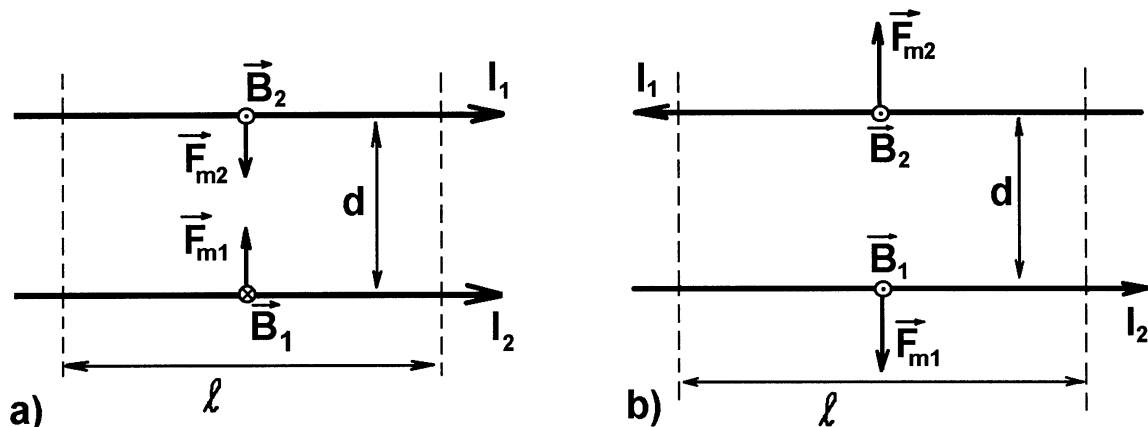
Stabilní poloze ($\vec{m}_A$ má směr shodný s $\vec{B}$) odpovídá minimum magnetické energie dané skalárním součinem

$$W_m = -\vec{m}_A \cdot \vec{B} \quad (3.29)$$

Praktické využití u elektromotorů nebo u deprežských měřících přístrojů.

4. Vzájemné silové působení vodičů s proudy

Uvažujme 2 dlouhé přímé vodiče ve vzájemné vzdálenosti d , protékané proudy I_1 a I_2 (obr. 3.13a).



Obr. 3.13.

První vodič v místě druhého vodiče vyvolá magnetické pole o magnetické indukci

$$\vec{B}_1 = -\vec{k} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}.$$

Na délku $\vec{l} = \vec{i}l$ druhého vodiče bude působit síla

$$\vec{F}_{m2} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1 = [\vec{i} \times (-\vec{k})] \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l = \vec{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l. \quad (3.30)$$

Obdobně druhý vodič v místě prvního vodiče vyvolá magnetické pole o magnetické indukci

$$\vec{B}_2 = -\vec{k} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}.$$

Na délku $\vec{l} = \vec{i}l$ prvního vodiče bude působit síla

$$\vec{F}_{m1} = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2 = [\vec{i} \times \vec{k}] \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l = -\vec{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l \quad (3.31)$$

Obě síly mají stejnou velikost ale opačnou orientaci $\Rightarrow$ **vodiče se přitahují**. (Směry obou sil je možné určit Flemingovým pravidlem levé ruky.

V případě, že proudy I_1 a I_2 ve vodičích budou mít nesouhlasný směr (obr. 3.13b), změní síly $\vec{F}_{m1}$, $\vec{F}_{m2}$ svou orientaci a **vodiče se budou odpuzovat**.

Definice jednotky elektrického proudu 1A v SI soustavě jednotek.

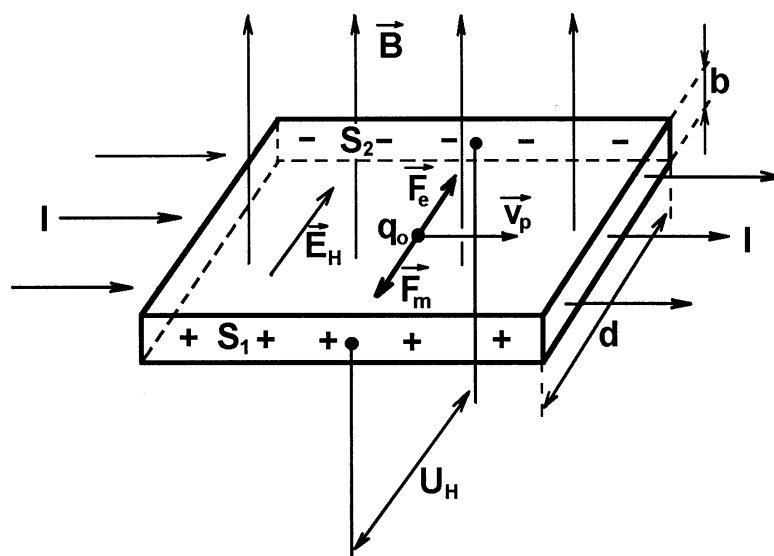
Jeden ampér je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými, přímými, nekonečně dlouhými vodiči, zanedbatelného průřezu, umístěnými ve vakuu, ve vzájemné vzdálenosti 1 m, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na jeden metr délky vodiče.

Zařízení pro praktickou aplikaci této definice se nerealizuje pomocí dlouhých přímých vodičů, ale pomocí válcových cívek (solenoidů), z nichž jedna je pevná a druhá je zavěšena na vahadle přesných analytických vah – **Ampérový váhy** (chyba je řádově mikroampéry).

5. Hallův jev

1879 E. H. Hall objevil jeden z nejznámějších **galvanomagnetických jevů**.

Vznik Hallova napětí U_H na plochém vodiči ve směru kolmém ke směru proudu I i ke směru magnetického pole, do kterého je vodič vložen, obr. 3.14.



Obr. 3.14.

Hallovo napětí je způsobeno silami, působícími na pohybující se nosiče náboje ve vodiči. Proud je tvořen uspořádaným pohybem částic s nábojem q_0 , které se pohybují průměrnou rychlostí $\vec{v}_p$ ve směru proudu, pak v magnetickém poli o indukci $\vec{B}$ na ně působí síla

$$\vec{F}_m = q_0 \vec{v}_p \times \vec{B}.$$

Tato síla způsobí větší koncentraci nosičů proudu u stěny $S_1 (+)$, zatímco stěna $S_2 (-) \Rightarrow$ vznik elektrického pole o intenzitě $\vec{E}_H$ a na nosiče náboje bude současně působit síla elektrická

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}_H.$$

Pro ustálený stav

$$F_e = F_m \Rightarrow q_0 E_H = q_0 E_H = q_0 |\vec{v}_p \times \vec{B}|.$$

Pro případ $\vec{v}_p \perp \vec{B}$ bude velikost intenzity vyjádřené Halloovým napětím U_H

$$E_H = \frac{U_H}{d},$$

po dosazení do předešlých rovnic

$$\frac{U_H}{d} = v_p B \Rightarrow U_H = d v_p B.$$

Pro n_0 volných nosičů náboje v jednotkovém objemu vodiče je velikost hustoty proudu ve vodiči $J = n_0 q_0 v_p$. Odtud

$$v_p = \frac{J}{n_0 q_0},$$

takže

$$U_H = dv_p B = \frac{1}{n_0 q_0} dJ B = \frac{1}{n_0 q_0} \frac{dbJ}{b} B.$$

$db = S_{\perp}$ kolmý průřez vodiče, tedy $dbJ = S_{\perp} J = I$ je velikost proudu vodičem.

Konstanta

$$\frac{1}{n_0 q_0} = R_H. \quad (3.32)$$

Hallova konstanta (nepřímo úměrná koncentraci volných nosičů náboje $n_0 q_0$).

pro Hallovo napětí platí vztah

$$U_H = R_H \frac{I}{b} B. \quad (3.33)$$

Poznámka:

U polovodičů je n_0 malé (oproti kovům) $\Rightarrow R_H$ je velká a proto se Hallův jev na polovodičích dobře měří.

U kovů se Hallův jev měří obtížně – je nutné použít tenké vzorky a citlivé měřiče napětí.

Ze vztahu (3.33) vyplývá, že pro danou vodivou nebo polovodivou destičku a konstantní proud I je U_H přímo úměrné velikosti magnetické indukce B .

Lze tedy stupnici voltmetru ocejchovat v jednotkách magnetické indukce a dostaneme přístroj zvaný **teslametr**.

3. 5. MAGNETICKÉ POLE V LÁTKOVÉM PROSTŘEDÍ

1. Intenzita magnetického pole

Pro vektorový popis magnetického pole jsou zavedeny vektory:

$\vec{B}$ magnetická indukce,

$\vec{H}$ intenzita magnetického pole.

Z fyzikálního hlediska mají obdobný význam $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (nikoliv $\vec{B}$ a $\vec{D}$) pomocí nichž vyjadřujeme síly působící v elektrických a magnetických polích na elektrické náboje (viz. vztah pro Lorentzovu sílu).

Ve vakuu je intenzita magnetického pole definovaná vztahem

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}. \quad (3.34)$$

Význam této veličiny vynikne zejména při studiu magnetického pole v látkovém prostředí. pro intenzitu magnetického pole v dutině solenoidu dostaneme

$$\vec{H} = \vec{i} \frac{NI}{l}. \quad (3.35)$$

Z tohoto vztahu vyplývá jednotka pro ***H ampér na metr*** (1 A.m^{-1})

Obdobně jako byly definovány magnetické indukční čáry, lze pro názorné zobrazení vektorového pole intenzity H definovat obdobné křivky – **magnetické siločáry** (orientované prostorové křivky, jejíž souhlasně orientovaná tečna v kterémkoliv jejím bodě má směr vektoru intenzity magnetického pole $\vec{H}$).

2. Vliv látkového prostředí na magnetické pole

Každá látka je schopna se ve vnějším magnetickém poli magnetizovat, tj. získat nenulový makroskopický magnetický moment, čímž se stává zdrojem magnetického pole o magnetické indukci $\vec{B}_i$.

$\vec{B}_i$ se skládá s magnetickým polem $\vec{B}_0$ od vodičů s proudem

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_i. \quad (3.36)$$

První vysvětlení podal Ampér – existence uzavřených proudů v látce.

Hypotéza **molekulárních proudů** – magnetický stav látky se zachovává i při dělení na menší částice.

Pohybem elektronů kolem jader atomů vznikají v molekulách kruhové elektrické proudy, které jsou zdrojem magnetického pole a přísluší jim určitý magnetický moment $\vec{m}_{ai}$ (Ampérův magnetický moment atomu nebo molekuly).

Bez vnějšího pole jsou tyto momenty orientovány chaoticky $\Rightarrow \vec{B}_i = 0$

a výsledný magnetický moment makroskopického objemu ΔV je roven nule

$$\Delta \vec{m}_i = \sum_{\Delta V} \vec{m}_{ai} = 0.$$

Působením vnějšího magnetického pole se magnetické momenty molekul $\vec{m}_{ai}$ orientují do jednoho směru a výsledný magnetický moment je nenulový a magnetické pole $\vec{B}_i \neq 0$.

Podle současných představ je magnetický moment atomů dán vektorovým součtem orbitálních a spinových magnetických momentů elektronů v elektronových obalech atomů (kvantová fyzika).

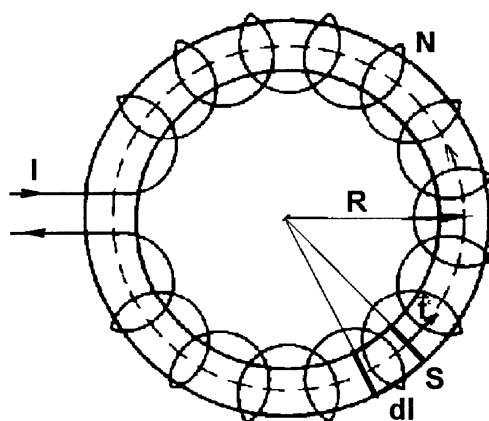
Ampérova představa se stále používá pro popis magnetického pole v látce.

3. Magnetická polarizace a magnetizace

Pro popis použijeme model látky v magnetickém poli toroidní cívky.

(vázané elektrické náboje vzniklé při polarizaci byly reálné, Ampérovy molekulární proudy jsou modelem).

Uvažujme hustě navinuto toroidní cívku (ve vakuu nebo ve vzduchu) o N závitěch, kterou prochází proud I (obr.3.15) – **proud přístupný**.



Obr. 3.15.

Velikost magnetické indukce v místě střední indukční čáry

$$B_0 = \mu_0 \frac{NI}{l} = \mu_0 H.$$

Vyplněním dutiny cívky látkou se magnetická indukce změní

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_i. \quad (3.37)$$

Podobně jako v případě polarizace dielektrika byl zaveden $\vec{P}_e$, zavedeme v případě magnetizace látky **vektor magnetizace** $\vec{M}$ (součet všech Ampérových magnetických momentů molekulárních proudů v jednotkovém objemu látky ΔV)

$$\vec{M} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{m}_{ai}}{\Delta V}. \quad (3.38)$$

Uvažujeme-li Coulombův magnetický moment $\vec{m}_{ci}$ molekulárního proudu atomu nebo molekuly

$$\vec{m}_{ci} = \mu_0 \vec{m}_{ai},$$

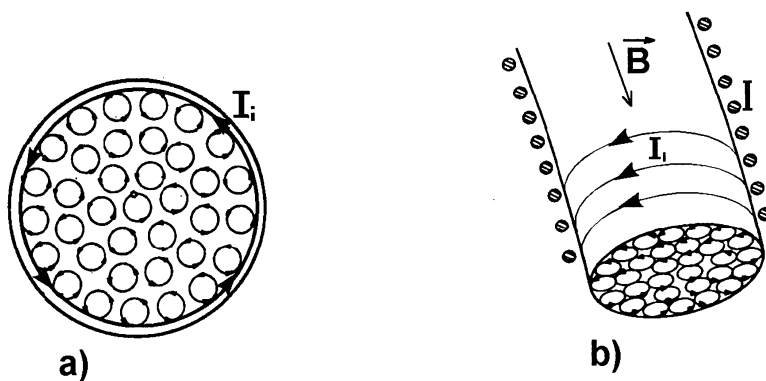
můžeme obdobně jako v případě vektoru magnetizace definovat **vektor magnetické polarizace**

$$\vec{P}_m = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{m}_{ci}}{\Delta V} = \mu_0 \vec{M}. \quad (3.39)$$

Jednotkou magnetizace je $1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ (stejná jednotka jako pro intenzitu magnetického pole) a jednotkou magnetické polarizace je 1 T (tesla - stejná jednotka jako magnetická indukce). Tedy

$$[M] = [H] = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}, \quad [P_m] = [B] = 1 \text{ T}.$$

Pro další úvahy nahradíme výsledné magnetické pole molekulárních proudů **makroskopickým nepřístupným (vázaným, povrchovým) proudem** I_i (proud procházející pod závit cívky na povrchu látky a vyvolává stejnou indukci $\vec{B}_i$ jako molekulární proudy) – obr. 3.16.



Obr. 3.16.

$$\vec{B}_i = \mu_0 \frac{NI}{l}. \quad (3.40)$$

Magnetické pole v toroidní cívce

$$\vec{B} = \vec{t}^0 \mu_0 \frac{NI}{l} + t^0 \mu_0 \frac{NI_i}{l},$$

kde $\vec{t}^0$ je jednotkový vektor tečny ke střední indukční čáře v toroidní cívce,
 I proud jejím vinutím,
 I_i povrchový (nepřístupný) proud na povrchu látky.

Vztah mezi $\vec{B}_i$ a $\vec{P}_m$ nebo $\vec{M}$.

Označme:

$\vec{S} = S\vec{t}^0$ vektor plochy kolmého průřezu toroidní cívky,
 Δl elementární úsek,

$\left(\frac{N}{l}\right)\Delta l$ počet závitů povrchových proudů I_i ,

$I_i\vec{S}$ Ampérův magnetický moment každého závitu,

Celkový Ampérův magnetický moment látkového prostředí v Δl toroidní cívky

$$\Delta\vec{m}_A = \sum_{\Delta V} \vec{m}_{ai}.$$

Podle (3.38) dostaneme pro $\vec{M}$

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{m}_A}{\Delta V} = \frac{NI_i}{l}\vec{t}^0$$

a vektor magnetické polarizace

$$\vec{P}_m = \mu_0\vec{M} = \mu_0 \frac{NI_i}{l}\vec{t}^0 = \vec{B}_i\vec{t}^0. \quad (3.41)$$

Porovnáním (3.41) a (3.40)

vektor magnetické polarizace $\vec{P}_m$ je roven magnetické indukci $\vec{B}_i$ magnetického pole molekulárních proudů

$$\vec{B}_i = \vec{P}_m = \mu_0\vec{M}. \quad (3.42)$$

4. Popis magnetického pole v látkovém prostředí

Magnetickou indukci $\vec{B}$ v látce můžeme vyjádřit

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{P}_m = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}). \quad (3.43)$$

Při vyplnění dutiny cívky látkou se intenzita magnetického pole v toroidní cívce $\vec{H}$ nezmění, změní se jen $\vec{B}$.

Jiná situace nastane v případě válečků, tyčinek, koulí apod., které budou vloženy do dutiny cívky. V tomto případě $\vec{H}$ v látce se odlišuje od $\vec{H}_0$ intenzity vnějšího magnetického pole.

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_D, \quad (3.44)$$

kde $\vec{H}_D$ je **intenzita demagnetizačního pole** působící proti vnějšímu magnetickému poli, a platí

$$|\vec{H}| \leq |\vec{H}_0|.$$

Pro vzorky typu elipsoidu, koule, desky a dlouhé tyče (uvnitř je pole homogenní)

$$\vec{H}_D = -D\vec{M}, \quad (3.45)$$

kde D je **demagnetizační faktor**. (koule $D = 1/3$, deska kolmá na indukční čáry $D = 1$, dlouhá tyč rovnoběžná s indukčními čarami $D = 0$).

$\vec{P}_m$ a $\vec{M}$ charakterizují stupeň uspořádání magnetických momentů $\vec{m}_{ai} \Rightarrow$ charakterizují stupeň magnetizace látky.

Pro lineární magnetika

$$\vec{M} = \kappa_m\vec{H} \text{ a tedy } \vec{P}_m = \mu_0\kappa_m\vec{H}, \quad (3.46)$$

kde κ_m je **magnetická susceptibilita** (bezrozměrná veličina, pro vakuum 0).

Vyjádříme-li magnetickou susceptibilitu z (3.46) a s přihlédnutím k (3.42) lze psát

$$|\kappa_m| = \frac{|\vec{P}_m|}{\mu_0 |\vec{H}|} = \frac{B_i}{\mu_0 |\vec{H}|} \quad \text{nebo pro toroidní cívku} \quad |\kappa_m| = \frac{B_i}{B_0},$$

kde B_0 je velikost magnetické indukce vnějšího magnetického pole.

Dosažením za magnetizaci $\vec{M}$ z (3.46) do (3.43), dostaneme vztah pro magnetickou indukci $\vec{B}$ v látkovém prostředí

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \kappa_m \vec{H} = \mu_0 \underbrace{(1 + \kappa_m)}_{\mu_r} \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (3.47)$$

kde veličina $\mu_r = 1 + \kappa_m$ je tzv. **relativní permeabilita** prostředí (bezrozměrná veličina).

Magnetická indukce $\vec{B}$ v látkovém prostředí je μ_r -krát větší než ve vakuu $\vec{B}_0$.

Permeabilita prostředí $\mu = \mu_0 \mu_r$.

U anizotropních látek $\vec{P}_m$ nemá obecně stejný směr jako $\vec{H}$. Proto $\hat{\kappa}_m$ je tenzorem magnetické susceptibility.

5. Magnetické vlastnosti látek

Látky silně magnetické,

Látky slabě magnetické

- slabě vtahovány do magnetického pole ($\kappa_m > 0$),
- slabě vypuzovány z magnetického pole ($\kappa_m < 0$)

Parametrem pro rozdělení látek podle jejich magnetických vlastností je κ_m nebo μ_r .

Látky paramagnetické $\kappa_m > 0, \mu_r > 1$,

Látky diamagnetické $\kappa_m < 0, \mu_r < 1$,

Látky feromagnetické $\kappa_m \gg 0, \mu_r \gg 1$.

Tabulka 3.1

Paramagnetika		Diamagnetika	
$\kappa_m \cdot 10^6$		$\kappa_m \cdot 10^6$	
vzduch	0,37	dusík	-0,004
kyslík	1,80	helium	-0,017
hliník	20,70	ethylakohol	-7,400
chrom	310,00	voda	-9,048
chlorid nikelnatý	1100,00	měď	-9,700
kapalný kyslík	3600,00	bismut	-175,00

Feromagnetické látky se obvykle charakterizují relativní permeabilitou μ_r , která však není konstantní a značně závisí na intenzitě magnetického pole v látce (udává se počáteční relativní permeabilita pro $H \rightarrow 0$). Dosahuje hodnot 10^3 až 10^5 i více.

a) Látky diamagnetické

atomy nebo molekuly diamagnetických látek mají bez přítomnosti vnějšího magnetického pole *nulový magnetický moment* (elektrony jsou spárovány a jejich magnetické momenty jsou vzájemně vykompenzovány), $\vec{B}_0 = 0, \vec{m}_{ai} = 0, \Delta\vec{m}_i = 0$.

Působením vnějšího pole získá každý elektron *indukovaný magnetický moment*, orientovaný proti vnějšímu poli.

b) Látky paramagnetické

atomy nebo molekuly mají *vlastní nenulový magnetický moment*.

Bez vnějšího magnetického pole chaoticky orientované magnetické momenty mají

$$\sum_{\Delta V} \vec{m}_{ai} = \Delta\vec{m}_i = 0.$$

Ve vnějším poli dojde k částečnému uspořádání do směru $\vec{B}_0$ (uspořádání je narušeno tepelným pohybem molekul).

κ_m paramagnetických látek závisí na T

$$\kappa_m = \frac{C}{T}, \quad (3.49)$$

C je tzv. Curieova konstanta (objevená P.Curiem)

Poznámka:

Magnetická polarizace $\vec{P}_m$ ve slabých magnetických polích je při dané teplotě lineární funkcí $\vec{H}$.

c) Feromagnetické látky

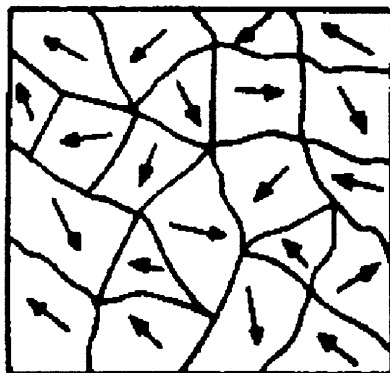
Skupina silně magnetických látek (Fe, Ni, Co, Gd,...). Odlišnosti oproti předchozím:

- velké hodnoty κ_m, μ_r již ve slabých magnetických polích $\vec{B} \gg \vec{B}_0$,
- κ_m, μ_r nejsou konstantní, ale obecně *nelineární* funkcí intenzity $\vec{H}$ (potom i $\vec{P}_m$ závisí nelineárně na $\vec{H}$),
- feromagnetické látky dosahují *nasyceného stavu* již ve slabých magnetických polích,
- magnetická susceptibilita feromagnetické látky závisí na $\vec{H}$ i na předchozím magnetování látky – jeví *hysterezi*,
- κ_m závisí na teplotě látky. Pro každou feromagnetickou látku existuje tzv. *Curieova teplota* T_C , při jejímž překročení se stává látka paramagnetickou (Fe – $T_C = 769^\circ\text{C}$, Ni – $T_C = 358^\circ\text{C}$). V paramagnetické oblasti platí pro κ_m *Curieův – Weisův zákon*

$$\kappa_m = \frac{C}{T - T_p}$$

platí pro $T \gg T_C$. T_p je tzv. paramagnetická Curieova teplota (několik desítek stupňů vyšší než T_C).

Domény – malé spontánně zmagnetované oblasti ve feromagnetické látce (obr. 3.17).



Obr. 3.17.

Objem domén 10^{-3} mm^3 až mm^3 .

Zahřátím nad T_C se doménová struktura zruší (není-li látka v magnetickém poli – látka je odmagnetovaná).

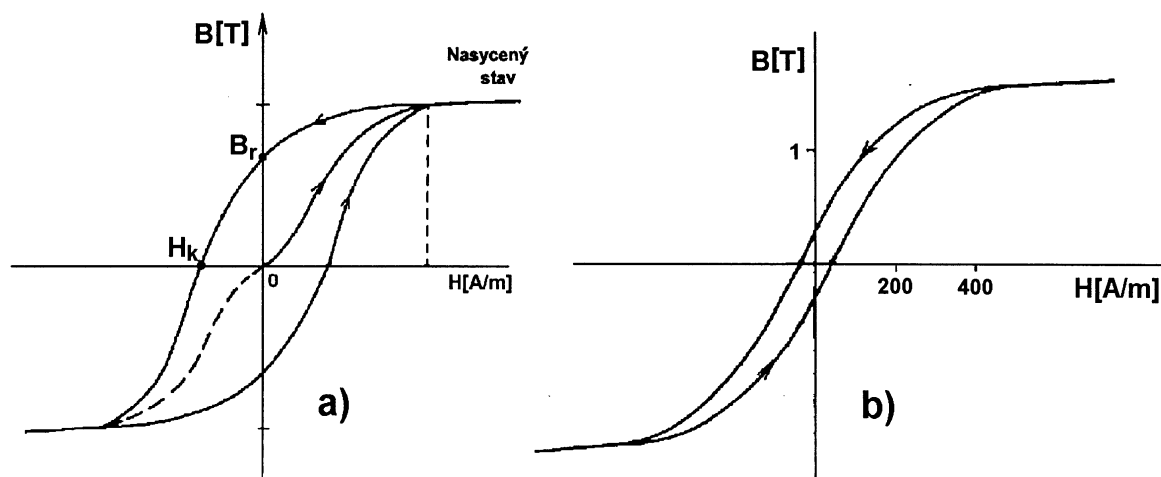
Magnetická hystereze

Vložení odmagnetované feromagnetické látky do magnetického pole o $\vec{H}$: $M = f(H)$, $B = f(H)$, viz. obr. 3.18a dojde k nevratným změnám v orientaci domén:

- *křivka prvotní magnetizace*,
- *nasycený stav*,
- *hysterezní křivka*,
- *remanentní magnetická indukce* (pro $H = 0$, $B = B_r$),
- *koercitivní intenzita* (změna směru při $B = 0$, $H = H_k$).

Celý cyklus – *hysterezní smyčka feromagnetika*.

Tvar hysterezní smyčky



Obr. 3.18.

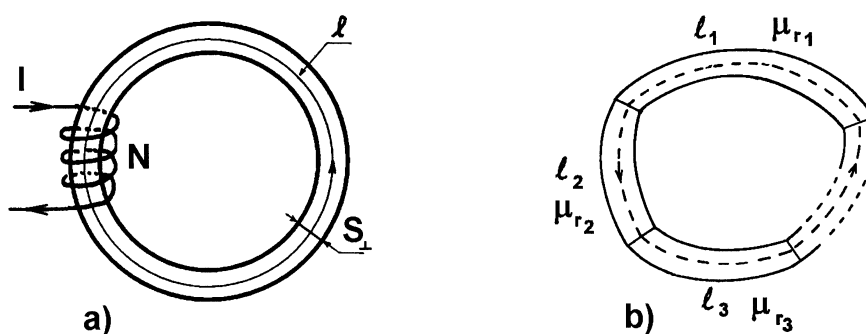
Velikost plochy – práce potřebná na přemagnetování jednotkového objemu magnetika (1 cyklus)

- **Magneticky tvrdé látky** – široká hysterezní smyčka (permanentní magnety).
- **Magneticky měkké látky** – úzká hysterezní smyčka – obr. 3.18b (jádra transformátorů, tlumivek, kotvy elektromotorů ...)

3.6 MAGNETICKÝ OBVOD

Magnetické indukční trubice (uzavřené útvary jejichž povrch je tvořen magnetickými indukčními čarami). Jejím kolmým průřezem prochází stejná indukční tok Φ_m .

V praxi bývá magnetická indukční trubice vyplněna látkami s vysokými hodnotami μ_r .



Obr. 3.19.

Příklad: cívka navinutá na prstencovém jádře z feromagnetického materiálu (obr. 3.19a). l – délka střední indukční čáry.

$\Phi_m = BS_{\perp}$ – magnetický indukční tok trubicí (pro homogenní magnetické pole).

Podle Ampérova zákona celkového proudu v látkovém prostředí

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r I_{celk} . \quad (3.51)$$

Vydělením $\mu_0 \mu_r$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{celk} = NI , \quad (3.52)$$

kde $I_{celk} = NI$ je proud ve vinutí cívky, který N – krát projde uvažovanou plochou.

Analogie se stacionárním elektrickým polem $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_e$

$$\textbf{Magnetomotorické napětí} \quad \mathcal{M} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{celk} = NI . \quad (3.53)$$

Při integraci po indukční čáře l je $\vec{H} \uparrow \uparrow d\vec{l}$, tedy $\vec{H} \cdot d\vec{l} = H dl$.

Úpravou

$$\Phi_m = B \cdot S_{\perp} = \mu_0 \mu_r H S_{\perp}$$

$$H = \Phi_m \frac{1}{\mu_0 \mu_r S_{\perp}} .$$

Dosazením do (3.53)

$$\mathcal{M} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_m \oint_l \frac{dl}{\mu_0 \mu_r S_{\perp}} . \quad (3.54)$$

Integrál má analogický tvar jako vztah pro elektrický odpor vodiče.

$$\textbf{Magnetický odpor obvodu} \quad \mathcal{M} = \Phi_m R_m . \quad (3.55)$$

Hopkinsův zákon – magnetomotorické napětí v magnetickém obvodu je rovno magnetickému indukčnímu toku násobeného magnetickým odporem obvodu.

Je-li $S_{\perp}$ konstantní ($S_{\perp}$ není funkcí l)

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r S_{\perp}} \oint_l dl = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{S_{\perp}} . \quad (3.56)$$

Bude-li magnetická indukční trubice procházet různými látkovými prostředími o

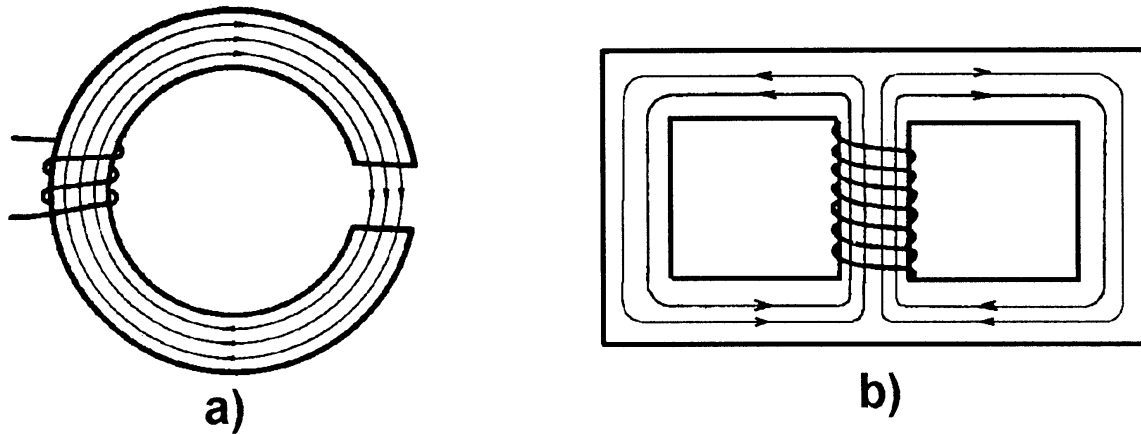
$\mu_{r1}, \mu_{r2}, \dots, \mu_m$ (obr.3.19b) pak vzhledem k tomu, že Φ_m je v libovolném místě trubice konstantní lze psát

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} H_1 dl + \int_{l_2} H_2 dl + \dots + \int_{l_n} H_n dl = \\ \Phi_m &\left[\int_{l_1} \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \frac{dl}{S_{\perp}} + \int_{l_2} \frac{1}{\mu_0 \mu_{r2}} \frac{dl}{S_{\perp}} + \dots + \int_{l_n} \frac{1}{\mu_0 \mu_m} \frac{dl}{S_{\perp}} \right] = \Phi_m [R_{m1} + R_{m2} + \dots + R_{mn}] . \end{aligned}$$

V případě, že magnetický indukční tok prochází postupně různými látkovými prostředími (obdobu zapojení rezistorů v sérii), je celkový magnetický odpor obvodu

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} + \dots + R_{mn} . \quad (3.57)$$

Příklad sériového řazení magnetických odporů, viz. obr. 3.20a.



Obr. 3.20.

Prstencové jádro z feromagnetického materiálu je přerušeno vzduchovou mezerou ($\mu_{rj} \gg 1, \mu_{rv} \approx 1$), bude $R_{mv} \gg R_{mj}$.

Při konstantním $\mathcal{M} = NI$ se musí podle Hopkinsonova zákona snížit Φ_m .

Toho se využívá u některých tlumivek a nízkofrekvenčních transformátorů, kde magnetizačním vinutím prochází jak střídavý, tak i stejnosměrný proud. Vytvořením malé vzduchové mezery se dosáhne, že trafo pracuje mimo oblast nasycení.

Případ na obr. 3.20b ukazuje na paralelní spojení magnetických obvodů, kdy Φ_m se rozdělí do dvou větví.

Paralelní zapojení rezistorů

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}} + \dots \quad (3.58)$$

4. NESTACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE

Jevy v elektrických obvodech s časově proměnnými proudy, kdy elektrická i magnetická pole jsou funkcemi času a tvoří

elektromagnetické pole.

Elektromagnetické rozruchy se šíří podél vodičů rychlostí světla ($3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$).

Kvazistacionární elektromagnetické pole – změny proudu v obvodu natolik pomalé, že jsou ve všech místech obvodu stejné (rozměry elektrického obvodu jsou mnohem menší než vlnová délka elektromagnetického rozruchu)

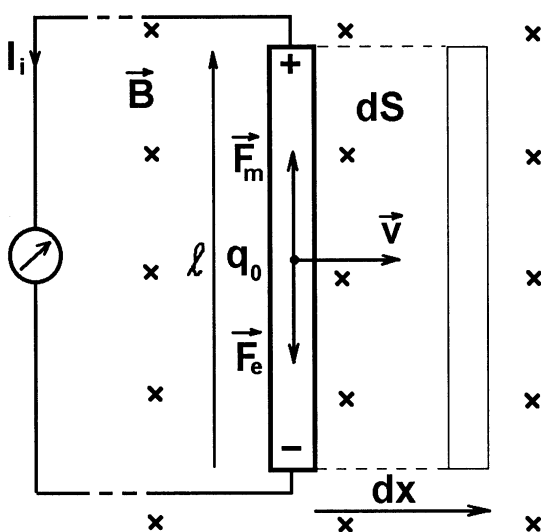
4. 1. FARADAYŮV ZÁKON ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE A JEHO APLIKACE

1. Odvození Faradayova zákona elektromagnetické indukce

1831 ji objevil M. Faraday při pokusech s cívkami a permanentními magnety.

Jev elektromagnetické indukce – každá časová změna Φ_m procházejícího uzavřeným elektrickým obvodem vyvolá v tomto obvodu indukovaný proud.

- Uvažujme přímý vodič délky l ,
- umístěný kolmo k indukčním čarám homogenního magnetického pole o indukci $\vec{B} = -k\vec{B}$.
- Pohyb kolmo k indukčním čarám $\vec{v} = \vec{i}v$ (obr. 4.1)



Obr. 4.1.

- Volně pohyblivé nosiče proudu q_0 (pohybují se rychlostí $\vec{v} = \vec{i}v$).
- Magnetická síla působící na nosiče $\vec{F}_m = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$ (přemístí je k hornímu konci vodiče $\Rightarrow +$, dolní konec – snížení koncentrace nosičů proudu $\Rightarrow -$).

Pole o intenzitě $\vec{E}_i$ podél vodiče bude bránit dalšímu přemísťování nábojů vlivem $\vec{F}_m$.

Ustálený stav

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_m \Rightarrow q_0 \vec{E}_i = -q_0 \vec{v} \times \vec{B}.$$

Odtud

$$\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B}.$$

Pomocí $\vec{E}_i$ vypočítáme U_i (předpoklad: $\vec{v}$ a $\vec{B}$ jsou konstantní)

$$U_i = \int_{-}^{+} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} = -v l B.$$

Rychlost vodiče $v = \frac{dx}{dt}$, plocha opsaná vodičem za čas dt : $dx \cdot l = dS$,

potom dostaneme: $U_i = - \frac{dx l}{dt} B = - \frac{dS B}{dt}.$

$dS \cdot B = \Phi_m$ magnetický indukční tok plochou dS za čas dt

tedy $U_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}.$ (4.1)

Faradayův Zákon elektromagnetické indukce v integrálním tvaru.

Vysvětlení záporného znaménka – **Lenzovo pravidlo**:

Směr indukovaného proudu v obvodu je vždy takové, že se svým magnetickým polem snaží zabránit změnám magnetického indukčního toku, které jej vyvolávají.

Zákon elektromagnetické indukce v diferenciálním tvaru:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

S využitím Stokesovy věty:

$$\int_s \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Na pravé straně jsou integrály stejného typu, můžeme porovnat integrandy

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$
 (4.2)

Indukované elektrické pole je **vírové** (jeho siločáry jsou uzavřené).

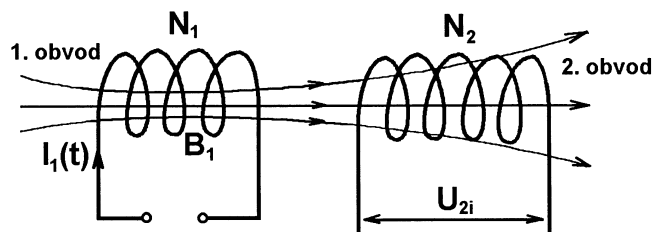
Změna magnetického pole vyvolává pole elektrické, obě pole spolu vzájemně souvisí a nelze je proto studovat odděleně.

2. Vzájemná indukce (jev)

Vznik indukovaného elektromotorického napětí v jiném obvodu způsobený časově proměnným magnetickým polem v okolí prvního obvodu.

Uvažujme:

- dva obvody (cívky), prvním prochází časově proměnný proud $I_1(t)$ (obr.4.2)



Obr. 4.2.

- počet závitů první cívky N_1 , počet závitů druhé cívky N_2 .
Velikost magnetické indukce v dutině první cívky je

$$B_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1(t)}{l} = k_1 I_1(t).$$

Vně cívky dochází k rozptylu magnetických indukčních čar a část Φ_{m1} bude procházet závitů druhé cívky.

Část Φ_{km} , který prochází k -tým závitkem vyjádříme koeficientem $0 \leq c_k \leq 1$, tedy

$$\Phi_{mk} = c_k B_1 S_k = c_k k_1 I_1(t) S_k,$$

S_k plocha k -tého závitu.

Magnetický indukční tok Φ_{m2} všemi závity druhé cívky

$$\Phi_{m2} = \sum_{k=1}^{N_2} (c_k S_k k_1) I_1(t) = M I_1(t). \quad (4.3)$$

Celkový magnetický indukční tok Φ_{m2} je přímo úměrný okamžité hodnotě proudu $I_1(t)$ v prvním obvodu.

Koeficient M je **koeficient vzájemné indukčnosti (vzájemná indukčnost)**.

Jednotka vzájemné indukčnosti $[M] = \text{Wb} \cdot \text{A}^{-1} = \text{H}$ (henry).

Dosazením Φ_{m2} do zákona elektromagnetické indukce dostaneme pro $U_2(t)$, které se indukuje ve druhém obvodu při změnách $I_1(t)$ v prvním obvodu.

Přenos energie z jednoho obvodu do druhého je zprostředkován magnetickým polem.

Hovoříme o **induktivní vazbě** mezi obvody:

- **těsná vazba** – téměř celý indukční tok prochází druhým obvodem,
- **volná vazba** – prochází jen malá část z celkového indukčního toku.

Příklad:

Těsná indukční vazba u dvou solenoidů (navinutých těsně na feromagnetickém jádře)

Pro všechny závity $c_k = 1$. Průřez jádra $S_\perp$, počet závitů N_1, N_2 .

Magnetický indukční tok k -tým závitkem druhého obvodu

$$\Phi_{mk} = B_1 S_\perp = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1(t)}{l} S_\perp.$$

Celkový magnetický indukční tok

$$\Phi_{m2} = \Phi_{mk} N_2 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 N_2}{l} S_\perp I_1(t).$$

Vzájemná indukčnost

$$M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 N_2}{l} S_\perp \quad (4.5)$$

3. Vlastní indukce

Změny magnetického indukčního toku vyvolávají ve vlastním obvodu indukované napětí U_i .

Uvažujme cívku, kterou prochází časově proměnný proud $I(t)$ (obr. 4.3).

Magnetický indukční tok $\Phi_{mk}(t)$ k -tým závitkem je přímo úměrný $I(t)$ procházejícímu cívkou

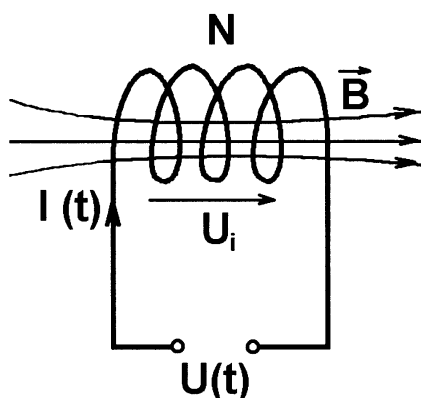
$$\Phi_{mk}(t) = c_k I(t).$$

Magnetický indukční tok všemi závity cívky je

$$\Phi_m(t) = \sum_{k=1}^N c_k I(t) = L I(t) \quad (4.6)$$

L je **vlastní indukčnost (indukčnost) cívky**.

Jednotka indukčnosti 1 H (henry).



Obr. 4.3.

Změny proudu v cívice vyvolají i změny magnetického indukčního toku.

Vlastní indukcí se v cívice indukuje napětí

$$U_i = - \frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (4.7)$$

Znaménko "-" vyjadřuje, že indukované napětí působí proti změnám proudu v obvodu.

Magnetická indukce v jednovrstvé toroidní cívice

$$B(t) = \mu_0 \mu_r \frac{NI(t)}{l}.$$

Magnetický indukční tok každým závitem je

$$\Phi_{mk}(t) = B(t)S_{\perp} = \mu_0 \mu_r \frac{NS_{\perp}}{l} I(t),$$

magnetický indukční tok všemi závity

$$\Phi_m(t) = \Phi_{mk}(t)N = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S_{\perp}}{l} I(t).$$

Pro indukčnost toroidní cívky dostaneme

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S_{\perp}}{l}. \quad (4.8)$$

Indukčnost cívky závisí na magnetických vlastnostech jádra (μ_r), geometrickém tvaru cívky (S, l) a roste s N^2 .

Poznámka:

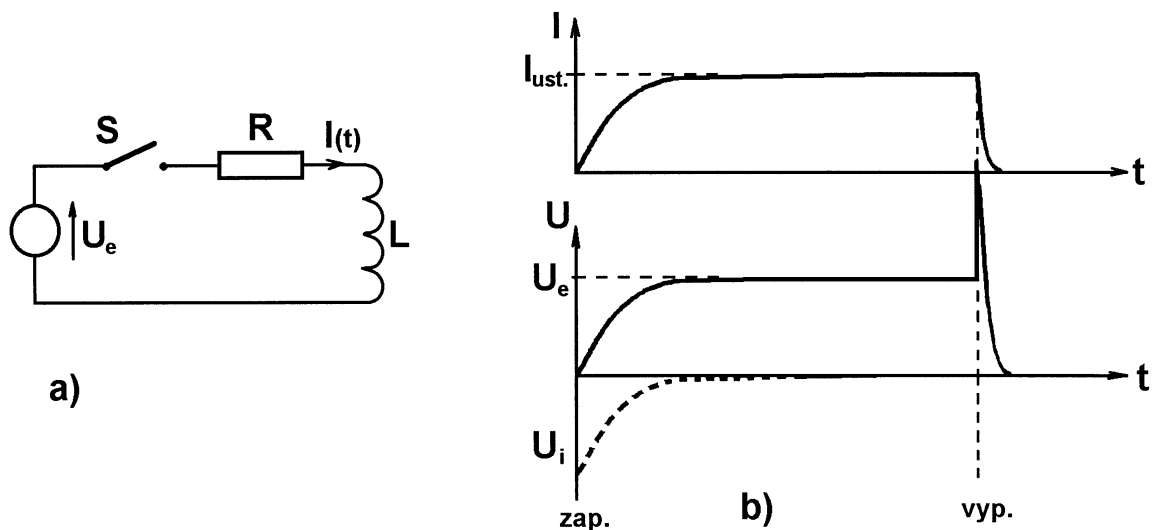
Vinutí cívky má vždy jistý odpor R_L . Reálnou cívku znázorňujeme jako sériovou kombinaci odporu a ideální indukčnosti L (obr. 4.4)



Obr. 4.4.

4. Přechodný děj v obvodu R,L při zapnutí a vypnutí zdroje stejnosměrného elektromotorického napětí

Uvažujme obvod znázorněný na obr. 4.5a (do hodnoty R zahrnujeme i odpor vinutí cívky R_L) **Připojením zdroje** (U_e) začne procházet časově proměnný proud $I(t)$, který vyvolá $\Phi_m(t)$, a tím i U_i .



Obr. 4.5.

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$RI(t) = U_e + U_i .$$

Diferenciální rovnice pro proud $I(t)$

$$RI(t) = U_e - L \frac{dI(t)}{dt} , \quad (4.9)$$

kterou upravíme

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{U_e}{L} . \quad (4.10)$$

Proud $I(t)$ je superpozicí proudu ustáleného $I_{ust} = \frac{U_e}{R}$ a **proudu přechodného** $i(t)$ (vymizí po určité době až se magnetický indukční tok ustálí).

$$I(t) = i(t) + I_{ust} = i(t) + \frac{U_e}{R} . \quad (4.11)$$

Dosazením do (4.10) dostaneme pro přechodný proud $i(t)$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) + \frac{U_e}{L} = \frac{U_e}{L} ,$$

odtud

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0 .$$

Řešení diferenciální rovnice metodou separace proměnných

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L} dt .$$

Integrací

$$\ln i(t) = -\frac{R}{L}t + \ln K,$$

odtud

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

Pro celkový proud

$$I(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_e}{R}.$$

Integrační konstanta K:

Počáteční podmínky pro $t=0$ je $I(t) = 0$.

Dosazením do předchozí rovnice

$$0 = K + \frac{U_e}{R} \Rightarrow K = -\frac{U_e}{R}.$$

Proud v obvodu je

$$I(t) = \frac{U_e}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{U_e}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (4.12)$$

kde $\tau = \frac{L}{R}$ je *časová konstanta* obvodu.

V čase $t = \tau$ je $e^{-1} = 0,37$, takže proud $I(t) = 0,67 I_{ust.}$

V čase $t = 3\tau$ je $e^{-3} = 0,05$, takže proud $I(t) = 0,95 I_{ust.}$ (proud se od ustálené hodnoty liší o 5%).

Indukované napětí v cívce vlivem vlastní indukce je

$$U_i = -L \frac{dI(t)}{dt} = -L \frac{U_e}{R} \left(\frac{R}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -U_e e^{-\frac{t}{\tau}},$$

a celkové elektromotorické napětí působící v obvodu je

$$U_e + U_i = U_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (4.13)$$

Časové průběhy jsou znázorněny na obr. 4.5b.

Při *vypnutí zdroje* U_e proud prudce poklesne na 0 (rychle poklesne Φ_m).

- v cívce se indukuje napěťový impuls,
- vyvolá se jiskření na kontaktech spínače,
- indukované napětí má souhlasnou polaritu jako napětí zdroje EMN.

Využití u induktoru, který přerušováním stejnosměrného proudu v primární cívce vyvolává rychlé změny magnetického indukčního toku v sekundární cívce induktoru, ve kterém se indukují impulzy velmi vysokého napětí.

5. Energie magnetického pole

Část energie dodaná zdrojem dodaná do obvodu na obr. 4.5a se spotřebuje na vytváření magnetického pole v cívce a část na zvýšení vnitřní energie rezistoru (Jouleovo teplo).

Za dobu dt

$$dW = dW_J + dW_m.$$

užitím vztahu $U_i = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt}$,

po vynásobení výrazem $I(t)dt$ obdržíme

$$U_e I(t)dt = RI^2(t)dt + LI(t)dI(t).$$

- Výraz na levé straně je energie dW dodaná do obvodu zdrojem za čas dt .
- První výraz na pravé straně je energie dW_J spotřebovaná na zvýšení tepla v rezistoru.
- Druhý výraz na pravé straně energie na zvýšení energie magnetického pole v cívce

$$dW_m = LI(t)dI(t).$$

Při nárůstu proudu $I(t)$ na hodnotu I vytvoří se pole o energii

$$W_m = \int_0^I LI(t)dI(t) = \frac{1}{2}LI^2. \quad (4.14)$$

Energie magnetického pole cívky o indukčnosti L , kterou prochází proud I .

Pro případ toroidní cívky

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} S_{\perp} I^2.$$

úpravou (čitatele i jmenovatele vynásobíme l)

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I^2}{l^2} S_{\perp} l = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 V = \frac{1}{2} BHV,$$

kde V je objem prostoru s magnetickým polem, B je magnetická indukce a H je intenzita magnetického pole.

Hustota energie magnetického pole

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}. \quad (4.15)$$

Skalární součin vektorů $\vec{B} \cdot \vec{H}$ zavádíme z důvodu, že v magneticky anizotropních prostředích mohou mít vektory různý směr.

Poznámka:

Hustota energie elektrického pole obdobně

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

6. Vířivé proudy (Foucaultovy)

Vířivé proudy vznikají v masivních vodičích pohybujících se v magnetickém poli nebo jsou v klidu v časově proměnném magnetickém poli (vířivé – nelze přesně určit jejich směr).

Účinky vířivých proudů:

- Vodič je brzděn – využití u tlumících systémů měřidel (u rotorů elektromotorů jsou tyto účinky nežádoucí).
- Vodič je zahříván – vysokofrekvenční ohřev (vložení do dutiny cívky protékané vysokofrekvenčním proudem).

Pro potlačení vířivých proudů – skládání vodičů z tenkých izolovaných plechů.

7. Vznik střídavého proudu

Nejvýznamnější aplikace Faradayova zákona elektromagnetické indukce.

Změna magnetického indukčního toku tím, že se mění směr vektoru plochy závitu $\vec{S}$ vzhledem ke směru vektoru magnetické indukce $\vec{B}$.

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS \cos \alpha.$$

4. 2. STŘÍDAVÝ PROUD

Střídavý elektrický proud (napětí) je periodickou funkcí času

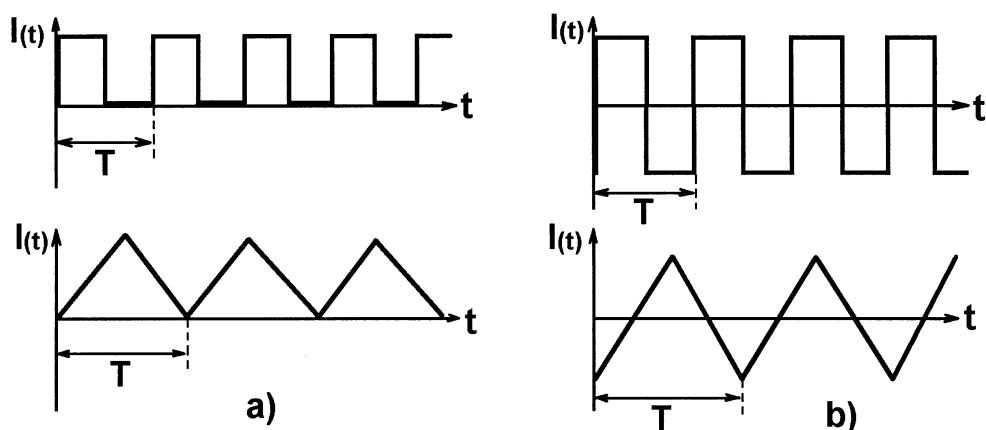
$$I(t) = I(t + nT) \quad , \text{ kde } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

T – perioda.

Střední hodnota střídavého proudu (napětí) během periody T musí být rovna 0.

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I(t) dt = 0.$$

tj. plocha ležící nad osou času musí být stejně velká jako plocha ležící pod osou času.



Obr. 4.6.

(porovnej obr. 4.6a – nejsou střídavé a obr.4.6b – střídavé průběhy proudů)

Vyjádření periodického signálu (střídavý proud nebo napětí) jako **Fourierova řada**

$$I(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t + \dots + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + b_3 \cos 3\omega t + \dots$$

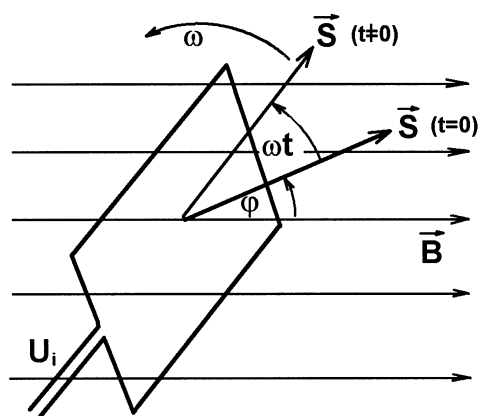
ω – základní úhlová frekvence,

$2\omega, 3\omega, \dots$ úhlové frekvence vyšších harmonických složek střídavého proudu.

Nejjednodušší jsou harmonické proudy o úhlové frekvenci ω (popis funkcemi $\sin \omega t, \cos \omega t$)

1. Vznik harmonického střídavého napětí a proudu

Otáčení cívky (ω) v homogenním magnetickém poli $\vec{B}$. Uvažujme závit (obr. 4.7)



Obr. 4.7.

V čase $t = 0$ – vektor $\vec{S}$ plochy závitu svírá s indukčními čarami úhel φ .

V čase $t \neq 0$ – vektor $\vec{S}$ plochy závitu svírá s indukčními čarami úhel $\alpha = \omega t + \varphi$.

Magnetický indukční tok $\Phi_m(t)$ se mění s časem

$$\Phi_m(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t + \varphi).$$

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se v závitu indukuje napětí

$$U_i = - \frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -BS \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi) = BS\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

střídavé harmonické napětí u ,

střídavý harmonický proud i .

Vyjádření rovnic $u = U_m \sin(\omega t + \varphi),$ (4.16)

u – okamžitá hodnota napětí,

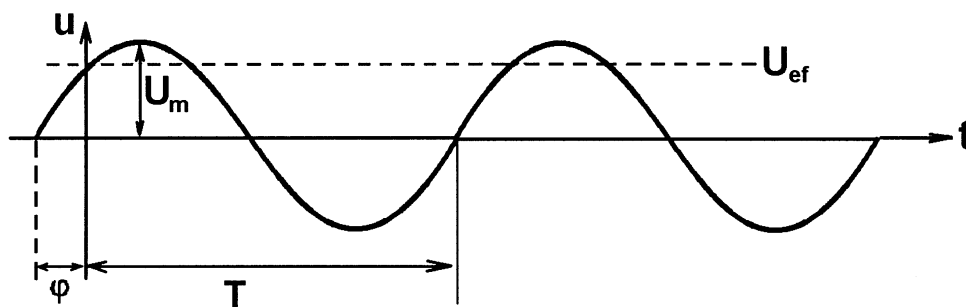
U_m – maximální (vrcholová) hodnota napětí, amplituda,

ω – úhlová frekvence $= 2\pi f = \frac{2\pi}{T},$

φ – počáteční fázový úhel, počáteční fáze,

$(\omega t + \varphi)$ fázový úhel, fáze.

Graf závislosti, obr. 4.8



Obr. 4.8.

φ – počáteční fázový úhel,
 T – perioda,
 U_m – maximální hodnota napětí.

Připojením zdroje střídavého napětí u k rezistoru R , bude jím procházet střídavý proud

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.17)$$

Pro maximální (vrcholovou hodnotu střídavého proudu platí

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (4.18)$$

Zjednodušení matematického vyjádření střídavých proudů a napětí pro $\varphi = 0$

$$i = I_m \sin \omega t.$$

2. Efektivní hodnota střídavého proudu a napětí

Efektivní hodnota I střídavého proudu je definována jako:

hodnota stejnosměrného proudu, který při průchodu rezistorem o odporu R vyvine za dobu jedné periody stejné Jouleovo teplo jako uvažovaný střídavý proud. Platí

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt.$$

Odtud vyjádříme

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt.$$

Rozepsáním integrálu

$$I^2 = \frac{1}{2T} I_m^2 \underbrace{\int_0^T dt}_T - \frac{1}{2T} I_m^2 \underbrace{\int_0^T \cos 2\omega t dt}_0 = \frac{I_m^2}{2}.$$

Pro efektivní hodnotu střídavého proudu

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.19)$$

Vyjádřením Jouleova tepla vyvinutého v rezistoru R pomocí napětí

$$\frac{U^2}{R} T = \frac{1}{R} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt,$$

dostaneme pro efektivní hodnotu střídavého napětí

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.20)$$

Poznámka:

Měřicí přístroje na měření střídavého proudu nebo napětí mají stupnici ocejchovanou v efektivních hodnotách (stejně tak jsou uváděny údaje na elektrických spotřebičích).

Maximální hodnota je tedy $U_m = 311 \text{ V}$, frekvence v síti $f = 50 \text{ Hz}$.

3. Rezistor, cívka a kondenzátor v obvodu střídavého proudu

Pasivní prvky – rezistor, cívka, kondenzátor,

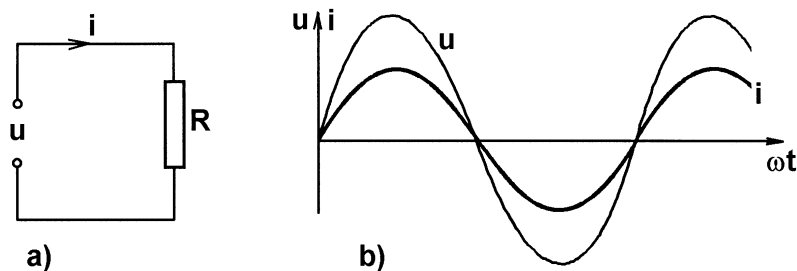
Aktivní prvky – zdroje střídavého napětí, tranzistory.

Ideální pasivní prvky – např. považujeme R_L vinutí cívky za zanedbatelně malý, L odporového vinutí rezistoru za zanedbatelně malou, nekonečně velký odpor ideálního dielektrika v kondenzátoru.

a) Rezistor o odporu R v obvodu střídavého proudu.

Uvažujme obvod znázorněný na obr. 4.9a s připojeným R ke zdroji střídavého napětí

$$u = U_m \sin \omega t,$$



Obr. 4.9.

takže podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$Ri = u.$$

Vyjádřením proudu i

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

kde

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

Proud rezistorem je **ve fázi** s napětím.

Odpor R lze vyjádřit

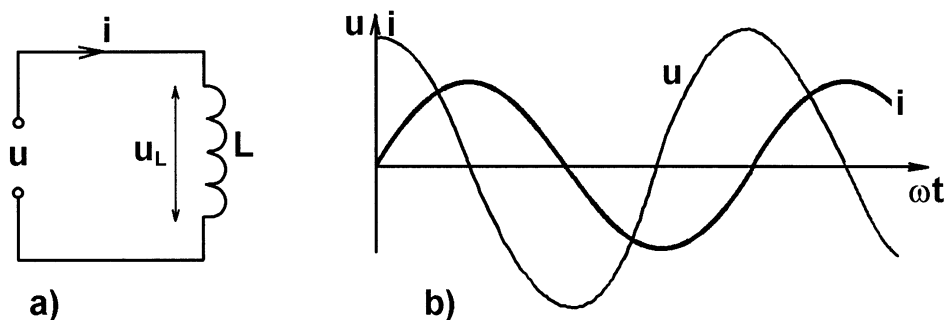
$$R = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \frac{U}{I}. \quad (4.21)$$

b) Cívka o indukčnosti L v obvodu střídavého proudu

Cívkou připojenou ke zdroji prochází střídavý proud

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (4.22)$$

Vlivem vlastní indukce se na cívce indukuje napětí u_L (obr.4.10a)



Obr. 4.10.

Při zanedbatelném odporu vinutí cívky ($R_L \rightarrow 0$) podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$u + u_L = 0 \Rightarrow u = -u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Dosazením za i dostaneme napětí u

$$u = LI_m \frac{d}{dt} \sin \omega t = I_m L \omega \cos \omega t = U_m \cos \omega t,$$

kde $U_m = I_m L \omega$.

"Zdánlivý" odpor cívky (odpor, který klade procházejícímu střídavému proudu)

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = L \omega. \quad (4.23)$$

Indukční reaktance nebo stručně **induktance** cívky. Jednotkou je ohm (Ω).

Pro lepší porovnání (časový průběh proudu – funkce $\sin \omega t$, časový průběh napětí – funkce $\cos \omega t$)

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.24)$$

napětí na cívce předbíhá proud o 90° ($\pi/2$) (proud indukčnosti se opoždí za napětím), viz. obr. 4.10b.

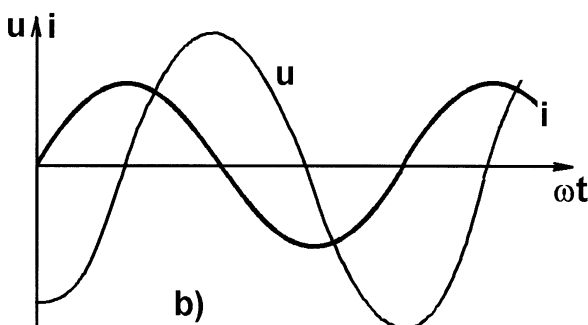
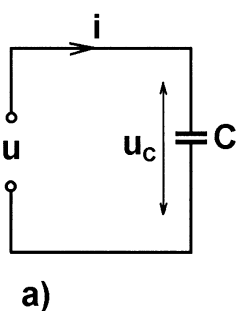
c) Kondenzátor o kapacitě C v obvodu střídavého proudu

Poznámka:

Připojením kondenzátoru ke zdroji stejnosměrného napětí obvodem projde proudový impuls, který kondenzátor nabije na napětí zdroje a **stejnoseměrný proud nebude obvodem s kondenzátorem procházet**.

Připojením kondenzátoru ke zdroji střídavého napětí u bude obvodem procházet nabíjecí a vybíjecí proud kondenzátoru, což se jeví, jako by střídavý proud i kondenzátorem procházel. Podle obr. 4.11a je kondenzátor připojen ke zdroji střídavého napětí

$$u = U_m \sin \omega t. \quad (4.25)$$



Obr. 4.11.

Podle 2. Kirchhoffova zákona musí platit

$$u + u_C = 0, \text{ kde } u_C = \frac{Q}{C},$$

takže

$$-\frac{Q}{C} = U_m \sin \omega t.$$

Po derivaci

$$-\frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = U_m \omega \cos \omega t.$$

$$-\frac{dQ}{dt} = i \quad \text{tedy} \quad i = U_m C \omega \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (4.26)$$

kde

$$I_m = U_m C \omega.$$

"zdánlivý odpor", který klade kondenzátor střídavému proudu

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C \omega}. \quad (4.27)$$

X_C se nazývá **kapacitní reaktance** stručněji **kapacitance**. Jednotkou je ohm (Ω).

Vyjádřením rovnice (4.26) pomocí sinu

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.28)$$

Proud v obvodu s kondenzátorem předbíhá napětí o $\pi/2$ (napětí se opoždí za proudem o 90°).

4. Práce a výkon střídavého proudu.

Uvažujme obecný případ, kdy u je vzhledem k proudu i fázově posunuto o úhel φ

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi), i = I_m \sin \omega t.$$

Vypočteme střední výkon za jednu periodu

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \varphi) \cdot \sin \omega t dt.$$

Úpravou integrálu

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

obdržíme

$$P = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \cos \varphi dt - \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt.$$

Druhý integrál je roven 0 a pro **činný výkon** spotřebovaný v zátěži dostáváme

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi. \quad (4.29)$$

$\cos \varphi$ – **účinník**

UI – **zdánlivý výkon**

4. 3. ŘEŠENÍ OBVODŮ STŘÍDAVÉHO PROUDU

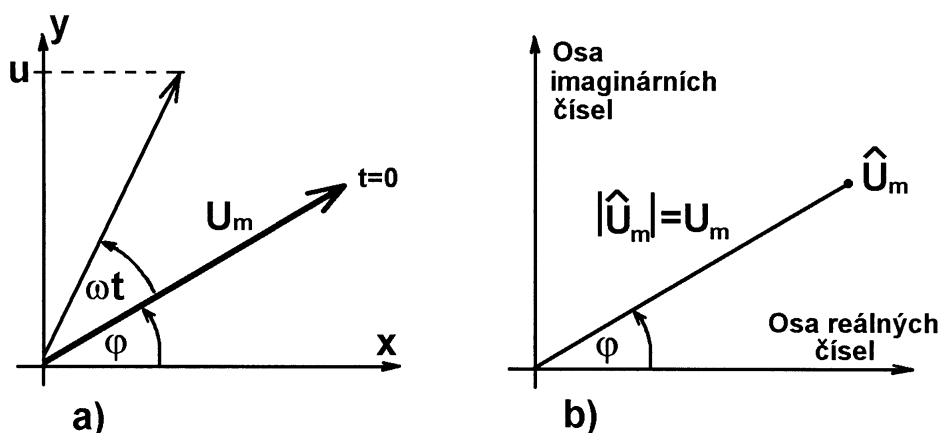
R , L , C můžeme spojovat sériově, paralelně nebo kombinovaně.

1. Znázornění střídavých napětí a proudů pomocí fázorů

Mějme střídavé napětí

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Fázor – orientovaná úsečka v rovině x, y , která má počáteční bod v počátku souřadnic a délku úměrnou amplitudě napětí U_m . (obr. 4.12a)



Obr. 4.12.

- V čase $t = 0$ svírá úsečka s osou x úhel φ .
- V čase $t \neq 0$ svírá s osou x úhel $(\omega t + \varphi)$.
- Průmět rotujícího fázoru do osy y je $U_m \sin(\omega t + \varphi)$ – okamžitá hodnota napětí u .

Podobně řešíme i střídavý proud i .

Fázory v měřítku amplitud.

Fázory v měřítku efektivních hodnot.

2. Symbolická komplexní metoda vyjádření střídavých veličin

Pro praktické výpočty je výhodnější vyjádřit střídavé veličiny komplexními čísly.

Každý fázor je jednoznačně určen svým koncovým bodem.

Nahrazením roviny x, y Gaussovou rovinou komplexních čísel můžeme přiřadit každému fázoru komplexní číslo (obr. 4.12b – komplexní číslo $\hat{U}_m$). Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna velikosti polohového vektoru (amplitudě střídavé veličiny).

3. Řešení sériového RLC obvodu

Sériový RLC obvod, připojený ke zdroji napětí $u = U_m \sin \omega t$ je na obr. 4.13a.

Podle 2. Kirchhoffova zákona je součet elektromotorických napětí působících v obvodu v každém okamžiku roven součtu napětí na rezistorech

$$Ri = u_L + u_C + u, \text{ kde } u_L = -L \frac{di}{dt} \text{ a } u_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int i dt.$$

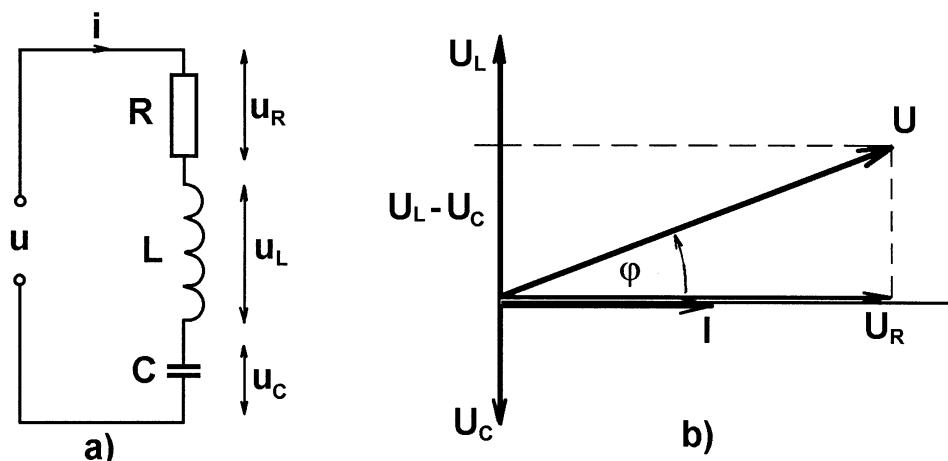
Po dosazení

$$Ri = -L \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \int i dt + U_m \sin \omega t.$$

Derivací podle času, dělením L a úpravou dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{U_m \omega}{L} \cos \omega t.$$

což je diferenciální rovnice pro **vynucený proud** v obvodu.



Obr. 4.13.

a) Řešení sériového RLC obvodu pomocí fázorů

V měřítku efektivních hodnot.

Prvky obvodu prochází stejný proud i (znázorníme ho fázorem ležícím v ose x).

- $U_R = RI$ je ve fázi s proudem,
- $U_L = IX_L = IL\omega$ předbíhá proud o $\frac{\pi}{2}$,

(4.30)

- $U_C = IX_C = I \frac{1}{C\omega}$ opoždí se za proudem o $\frac{\pi}{2}$.

(4.31)

Grafickým součtem napětí na jednotlivých prvcích(4.13b)

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + \left(IL\omega - I \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

Vytknutím I před odmocninu

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

Impedance – odpor sériového R L C obvodu

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}. \quad (4.32)$$

Jednotkou impedance je ohm (Ω)

Fázový úhel – fázový posun napětí u vzhledem k proudu i

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (4.33)$$

Diskuse:

- a) $L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$, v obvodu převládá indukce nad kapacitancí – napětí předbíhá proud.

b) $L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0$, v obvodu převládá kapacitance nad induktancí – napětí se opoždí za proudem.

c) $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ – u a i jsou ve fázi, impedance je minimální $\Rightarrow$ proud je maximální.

Součet u_L a u_C je v každém okamžiku roven 0.

Tento stav sériového RLC obvodu nazýváme **sériová rezonance (rezonance napětí)**

Rezonanční frekvence

$$L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} = 0.$$

odtud **Thomsonův vztah** pro rezonanční frekvenci

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.34)$$

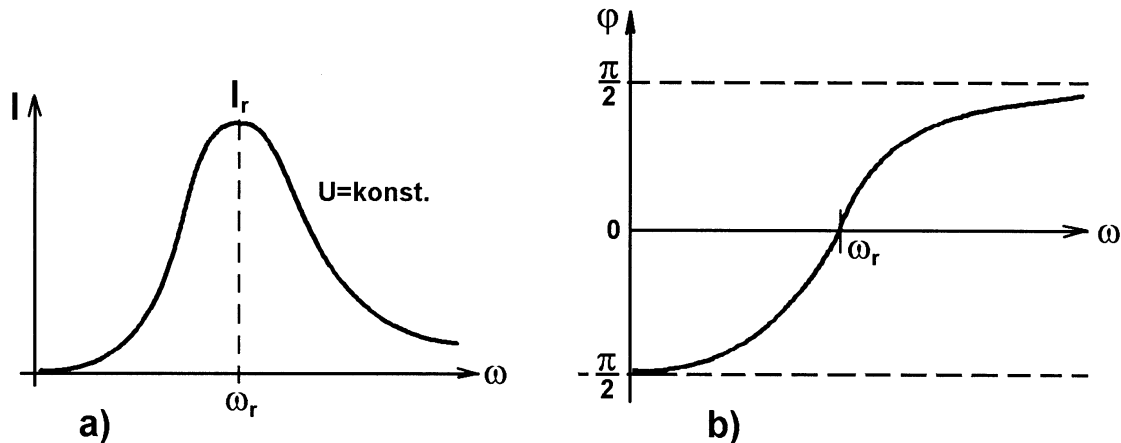
Názornější přehled o vlastnostech obvodu při různých frekvencích – **kmitočtové charakteristiky (amplitudové nebo fázové)**.

$Z = Z(\omega), U = U(\omega)$ při napájení konstantním proudem I .

$I = I(\omega)$ při napájení obvodu ze zdroje konstantní efektivní hodnoty U (obr. 4.14a)

Na obr. 4.14b – graf kmitočtové fázové charakteristiky (závislost fáze na frekvenci)

Pro přesnější stanovení ω_r je výhodnější fázová charakteristika.



Obr. 4.14.

b) Řešení sériového RLC obvodu symbolickou komplexní metodou

Proudu i přiřadíme (v měřítku efektivních hodnot) komplexní číslo $\hat{I}$ (komplexní efektivní proud).

Napětím na rezistoru, indukčnosti a kondenzátoru přiřadíme $\hat{U}_R, \hat{U}_L, \hat{U}_C$ (komplexní efektivní napětí).

Celkové komplexní efektivní napětí

$$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C. \quad (4.35)$$

Napětí na rezistoru je ve fázi s proudem, takže $\hat{U}_R$ není vzhledem k $\hat{I}$ pootočeno.

$$\hat{U}_R = R\hat{I}.$$

Napětí na indukčnosti předbíhá proud o 90°

$$\hat{U}_L = \hat{Z}_L \hat{I} = jL\omega \hat{I}. \quad (4.36)$$

Napětí na kondenzátoru se opožďuje za proudem o 90°

$$\hat{U}_C = \hat{Z}_C \hat{I} = -j \frac{1}{C\omega} \hat{I}. \quad (4.37)$$

Dosažením

$$\hat{U} = R\hat{I} + jL\omega \hat{I} - j \frac{1}{C\omega} \hat{I} = \hat{I} \left[\underbrace{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}_{\hat{Z}} \right]. \quad (4.38)$$

$\hat{Z}$ – **komplexní impedance** sériového RLC obvodu.

Ohmův zákon pro střídavý proud

$$\hat{U} = \hat{Z}\hat{I}. \quad (4.39)$$

Komplexní impedance

$$\hat{Z} = R + j \underbrace{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}_X = R + jX.$$

má reálnou část $R = \text{Re}(\hat{Z})$ – **rezistance**,

imaginární část $X = \text{Im}(\hat{Z})$ – **reaktance**.

$$\text{Velikost impedance} \quad Z = |\hat{Z}| = \sqrt{[\text{Re}(\hat{Z})]^2 + [\text{Im}(\hat{Z})]^2}. \quad (4.40)$$

Fázový posun

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{Im}(\hat{Z})}{\text{Re}(\hat{Z})} \quad (4.41)$$

Poznámka:

doazením za reálnou a imaginární část komplexní impedance dostaneme vztahy (4.32) a (4.33) odvozené pomocí fázorů.

4. Řešení paralelního RLC obvodu

Uvažujme paralelní RLC obvod podle obr. 4.15a.

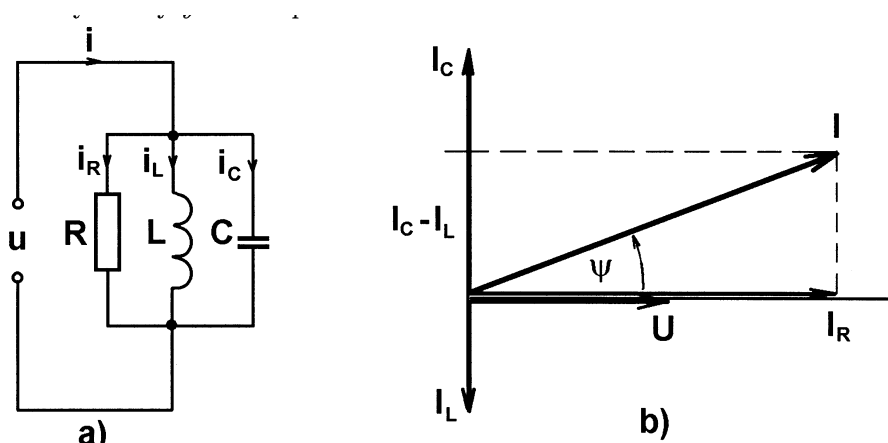
Na větvích obvodu je stejné napětí u .

Celkový proud i ze zdroje se rozdělí na proudy i_R, i_L, i_C .

- proud i_R bude ve fázi s napětím,
- proud i_L cívku se fázově opožďuje za napětím o 90° ,
- proud i_C kondenzátorem bude předbíhat napětí u o 90° .

Pro celkový proud musí v každém okamžiku platit 1. Kirchhoffův zákon

$$i = i_R + i_L + i_C$$



Obr. 4.15.

Celkový posun proudu i oproti napětí u označíme $\psi = -\varphi$.

a) Řešení paralelního RLC obvodu pomocí fázorů

Společnému napětí u přiřadíme v měřítku efektivních hodnot fázor U , který umístíme do osy x (obr.4.15b).

Vektorovým součtem fázorů I_R , I_L , I_C obdržíme fázor I přiřazený celkovému proudu i .

Velikost I podle Pythagorovy věty

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}. \quad (4.42)$$

Vyjádříme velikosti proudů pomocí napětí U

$$I_R = \frac{U}{R}, I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{L\omega}, I_C = \frac{U}{X_C} = UC\omega,$$

dosazením do předchozího vztahu

$$I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}. \quad (4.43)$$

Veličina

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}. \quad (4.44)$$

představuje "vodivost" paralelního obvodu pro střídavý proud – **admittance**.

Jednotkou admittance je $\Omega^{-1} = S(\text{siemens})$.

pro fázový posuv celkového proudu vzhledem k napětí platí

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{\frac{1}{R}} = R \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right). \quad (4.45)$$

Diskuse:

a) $C\omega - \frac{1}{L\omega} > 0$, v obvodu převládá proud kondenzátorem nad proudem cívky,

$\psi > 0$, i předbíhá napětí u o úhel ψ .

b) $C\omega - \frac{1}{L\omega} < 0$, v obvodu převládá proud indukčností nad proudem kondenzátorem,
 $\psi < 0$, proud i se opoždí za napětím u o úhel ψ .

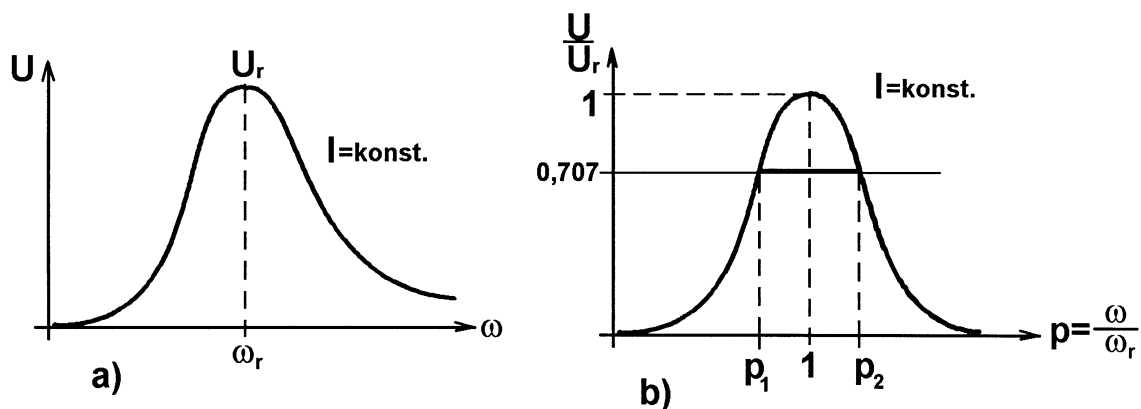
c) $C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$, pak $\psi = 0$, napětí u a proud i jsou ve fázi, admitance Y je minimální a je rovna vodivosti rezistoru, $Y = \frac{1}{R}$.

Součet proudů i_L, i_C je v každém okamžiku 0 – **paralelní rezonance (rezonance proudu)**.

Rezonanční frekvence z podmínky $C\omega_r - \frac{1}{L\omega_r} = 0$,

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4.46)$$

Kmitočtové charakteristiky paralelního RLC obvodu,



Obr. 4.16.

Při rezonanci je admitance minimální a napětí je proto při $I = \text{konst.}$ maximální (obr. 4.16a)

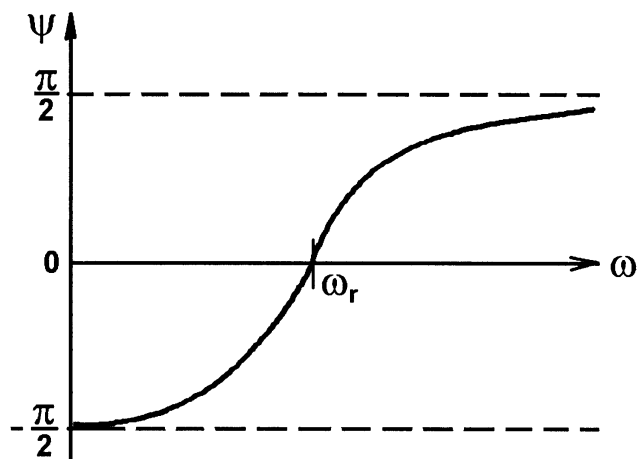
Rezonanční obvody – obvody RLC, které pracují v blízkosti své rezonanční frekvence,
rezonanční křivka – amplitudová kmitočtová charakteristika rezonančního obvodu, viz. obr. 4.16b.

Čím je rezonanční křivka užší, tím je rezonanční obvod kvalitnější.

Činitel kvality rezonančního obvodu Q

$$Q = \frac{1}{p_1 - p_2}.$$

Na obr. 4.17 je znázorněná kmitočtová fázová charakteristika paralelního RLC obvodu.



Obr. 4.17.

b) Řešení paralelního RLC obvodu komplexní metodou

Napětí u přiřadíme komplexní číslo $\hat{U}$ a proudům v obvodu komplexní čísla $\hat{I}, \hat{I}_R, \hat{I}_L, \hat{I}_C$

Podle 1. Kirchhoffova zákona musí platit

$$\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C. \quad (4.47)$$

Komplexní proudy ve větvích pomocí komplexního napětí $\hat{U}$

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}}{R}, \hat{I}_L = -j \frac{U}{L\omega}, \hat{I}_C = jC\omega\hat{U}.$$

Po dosazení

$$\hat{I} = \hat{U} \left[\underbrace{\frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)}_{\hat{Y}} \right], \quad (4.48)$$

kde veličina

$$\hat{Y} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right). \quad (4.49)$$

se nazývá **komplexní admittance** paralelního RLC obvodu.

Komplexní admittance paralelně řazených prvků je dána součtem komplexních admitancí jednotlivých prvků, tj. součtem

$$\hat{Y}_R = \frac{1}{R}, \hat{Y}_L = -j \frac{1}{L\omega}, \hat{Y}_C = jC\omega. \quad (4.50)$$

Reálná část $G = \text{Re}(\hat{Y})$ **konduktance**,

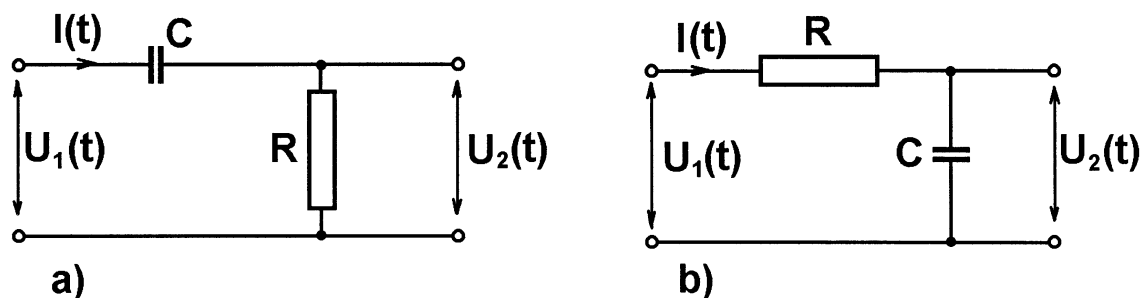
Imaginární část $B = \text{Im}(\hat{Y})$ **susceptance**

$$\hat{Y} = G + jB.$$

5. Derivační a integrační obvody.

- Obvody, které provádějí časovou derivaci nebo integraci vstupního napětí (realizace pomocí rezistorů, kondenzátorů nebo rezistorů a cívek,
- Napětí U_I nemusí mít harmonický průběh

a) Derivační obvod (obr. 4.18a)



Obr. 4.18.

Podmínka derivačního obvodu

$$X_C \gg R.$$

potom

$$U_1(t) + U_C \rightarrow 0, \text{ kde } U_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int I(t) dt.$$

Tuto rovnici derivujeme podle času a vyjádříme proud $I(t)$

$$I(t) = C \frac{dU_1(t)}{dt}.$$

Výstupní napětí $U_2(t)$ je napětí na rezistoru, takže podle Ohmova zákona

$$U_2(t) = RI(t) = RC \frac{dU_1(t)}{dt}. \quad (4.51)$$

Napětí na výstupu obvodu je úměrné časové derivaci vstupního napětí

b) Integrační obvod (obr.4.18b)

Podmínka integračního obvodu

$$R \gg X_C.$$

Pak

$$I(t) = \frac{U_1(t)}{R}.$$

Výstupní napětí $U_2(t)$ je napětím na kondenzátoru, takže

$$U_2(t) = U_C = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int I(t) dt = -\frac{1}{RC} \int U_1(t) dt. \quad (4.52)$$

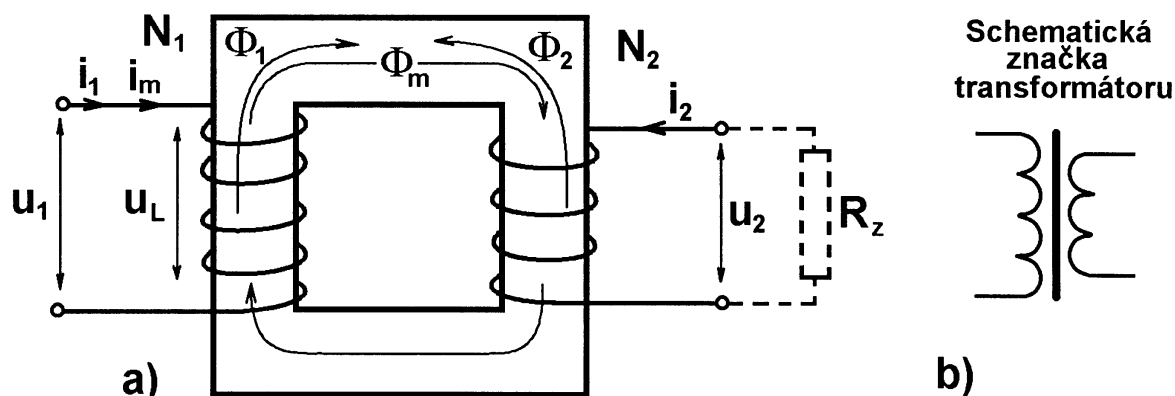
Napětí na výstupu obvodu je úměrné časovému integrálu vstupního napětí.

4. 4. TRANSFORMACE STŘÍDAVÉHO NAPĚTÍ A PROUDU

Transformátory – zařízení k provádění přeměny střídavého proudu na proud téže frekvence a jiného napětí.

Magnetický obvod (jádro transformátoru) tvoří základ transformátoru:

- tenké izolované plechy z feromagnetické látky s úzkou hysterezní smyčkou,
- **primární cívka** (do ní přivádíme proud k transformaci),
- **sekundární cívka** (odvádíme z ní transformovaný proud),
- **těsná indukční vazba** – mezi oběma cívkami.



Obr. 4.19.

a) Nezatížený transformátor

Sekundární obvod není uzavřen (neprochází jím proud), $i = 0$.

Počet závitů primární cívky N_1 .

Počet závitů sekundární cívky N_2 .

Napětí na primární cívce $u_1 = U_{m1} \sin \omega t$,

vyvolá malý magnetizační proud i_m (vzhledem k velké indukčnosti primární cívky).

Proud vyvolá v jádře střídavý magnetický indukční tok Φ_m .

Φ_m vyvolá v primární cívce indukované napětí u_L .

$$u_L = -N_1 \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.53)$$

Zanedbáme-li odpor vinutí primární cívky, platí podle 2. Kirchhoffova zákona

$$u_1 + u_L = 0, \Rightarrow u_1 = -u_L = N_1 \frac{d\Phi_m}{dt},$$

odtud vyjádříme

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{u_1}{N_1},$$

dosazením do vztahu pro indukované napětí u_2 v sekundární cívce

$$u_2 = -N_2 \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{N_2}{N_1} u_1 = -\frac{N_2}{N_1} U_{m1} \sin \omega t.$$

"mínus" vyjadřuje, že napětí u_2 indukované v sekundární cívce má opačnou fázi oproti u_1 (důsledek Lentzova pravidla).

Vrcholová hodnota sekundárního napětí

$$U_{m2} = \frac{N_2}{N_1} U_{m1}.$$

a pro poměr vrcholových nebo efektivních hodnot platí

$$\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = p \quad (4.54)$$

Transformační poměr

- **transformace nahoru** – $N_2 > N_1$, $p > 1$, na vyšší napětí $U_2 > U_1$,
- **transformace dolů** – $N_2 < N_1$, $p < 1$, transformace na nižší napětí.

- $p = I$ použití z bezpečnostních důvodů pro oddělení sekundáru od rozvodné sítě.

b) Zatížený transformátor

Připojení zátěže k sekundárnímu vinutí (R_Z).

- proud sekundárním vinutím i_2 vyvolá v jádře střídavý magnetický indukční tok Φ_2 ,
- Φ_2 působí proti Φ_m (napětí sekundární má opačnou fázi oproti primárnímu).
- Magnetický indukční tok se zmenší a zmenší se i napětí u_L indukované v primární cívce
- Porušená rovnováha ($u_L \neq u_1$) vyvolá další proud i_1 (ten vyvolá v jádře Φ_1 působící proti Φ_2) až se obnoví původní stav

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_2 = \Phi_m, \Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1.$$

Podle Hopkinsonova zákona pro vrcholové hodnoty magnetických indukčních toků platí

$$\frac{N_2 I_{m2}}{R_m} = \frac{N_1 I_{m1}}{R_m},$$

odtud

$$\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{p}. \quad (4.55)$$

Poznámka:

Při rozvodech elektrické energie dochází ke ztrátám výkonu na odporu vedení R_z

($P_{ztr} = R_z I^2$).

Pro omezení ztrát se provádí transformace nahoru (vysoké napětí, malý proud).

Před rozvodem do spotřebitelské sítě se provede transformace dolů (na napětí 220 V).

Transformace dolů rovněž provádíme:

- při svařování elektrickým obloukem,
- u transformátorových plechů,
- u transformátorových pájek,

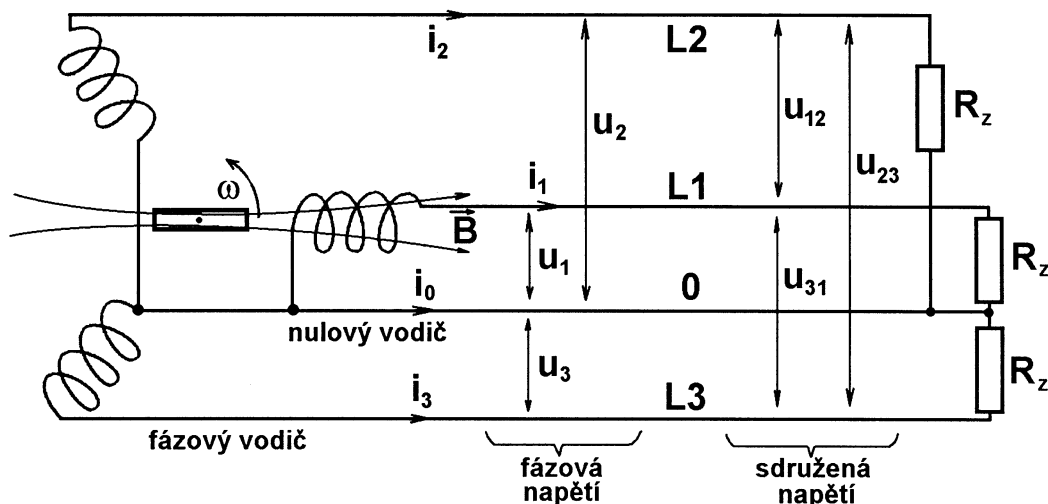
tj. všude tam, kde při malém napětí musíme získat velký proud.

4. 5. TŘÍFÁZOVÝ PROUD

a) Vznik a vlastnosti třífázového proudu

Třífázový proud se vyrábí v generátorech – alternátorech.

Princip alternátoru je na obr. 4. 20.



Obr. 4.20.

- **stator** s trojím vinutím (cívkami) s osami pootočenými o 120° ,
- **rotor** alternátoru je silný elektromagnet otáčející se s úhlovou rychlostí ω (indukce střídavých napětí fázově posunutých o 120°).

Okamžité hodnoty indukovaných napětí v cívkách

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \sin \omega t \\ u_2 &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \\ u_3 &= U_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Vhodným spojením cívek lze využít 4 vodiče k přenosu třífázového napětí

- **nulový (střední) vodič**,
- **3 fázové vodiče** (L1, L2, L3).

fázová napětí – napětí mezi fázovými a nulovým vodičem ($U = 220 \text{ V}$, $U_m = 220\sqrt{2} = 311 \text{ V}$.)

sdrúžené napětí – napětí mezi dvěma fázovými vodiči (U_{12} , U_{23} , U_{31}).

Příklad:

Stanovení sdrúženého napětí U_{12} mezi L1 a L2.

Pro okamžitou hodnotu sdrúženého napětí platí

$$u_{12} = u_1 - u_2 = U_m \left[\sin \omega t - \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \right] = U_m 2 \cos \left(\omega t - \frac{1}{3} \pi \right) \sin \left(\frac{1}{3} \pi \right).$$

Po dosazení za $\sin(\pi/3) = \sin 60^\circ$ a vyjádření $\cos$ jako $\sin$ dostaneme

$$u_{12} = \sqrt{3} U_m \sin \left(\omega t - \frac{1}{3} \pi \right) = \sqrt{3} U_m \sin \left(\omega t + \frac{1}{6} \pi \right).$$

Odtud je zřejmé, že amplituda sdrúženého napětí je

$$U_{m12} = \sqrt{3} U_m, \quad (4.57)$$

tj. $\sqrt{3}$ – krát větší než amplituda fázového napětí.

Amplituda sdruženého napětí $U_{msdr} 311\sqrt{3} = 538V$,

Efektivní hodnota sdruženého napětí $U_{sdr} = 220\sqrt{3} = 380V$

Zapojením spotřebiče (odpor R_Z) mezi nulový vodič a fázové vodiče, potečou fázovými vodiči proudy o stejné amplitudě

$$I_m = \frac{U_m}{R_Z} \text{ vzájemně fázově posunuty o } 120^\circ.$$

okamžitá hodnota proudu i_0 nulovým vodičem

$$i_0 = i_1 + i_2 + i_3 = I_m \left[\sin \omega t + \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) + \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \right].$$

Pro úpravu použijeme vzorce $\sin(\alpha - \beta) = \dots$

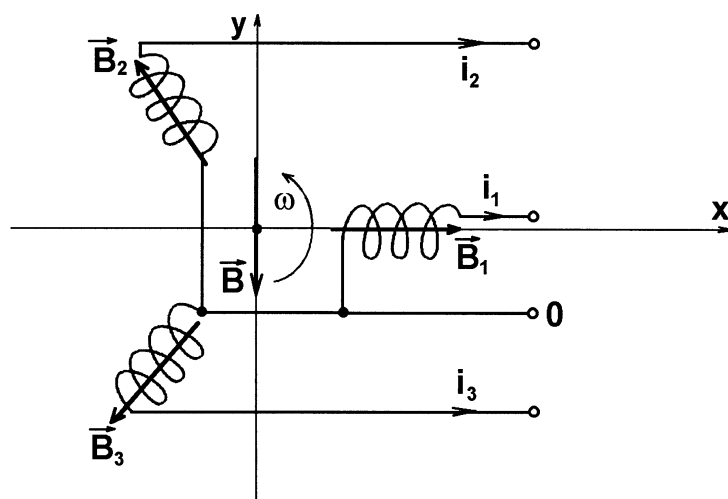
$$i_0 = \sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t = 0.$$

Pokud zatížení fází není stejné, prochází nulovým vodičem malý vyrovnávací proud.

b) Točivé magnetické pole

Zjednodušení konstrukce elektromotorů.

Stator elektromotorů na třífázový proud se skládá ze tří cívek (posunutí 120°), viz. obr. 4.21.



Obr. 4.21.

Proudy procházející cívkami vyvolají střídavá magnetická pole (prostorově i fázově posunuta o 120°).

Okamžité hodnoty vektorů magnetické indukce

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_{m1} \sin \omega t$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_{m2} \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$\vec{B}_3 = \vec{B}_{m3} \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right)$$

kde pro velikosti amplitud platí

$$|\vec{B}_{m1}| = |\vec{B}_{m2}| = |\vec{B}_{m3}| = B_m.$$

Složením dílčích magnetických polí vznikne v prostoru mezi cívkami výsledné magnetické pole o magnetické indukci $\vec{B}$, jako vektorový součet indukcí $\vec{B}_1$ až $\vec{B}_3$.

V souřadném systému x, y

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y.$$

$$B_{1x} = B_1 = B_m \sin \omega t,$$

$$B_{2x} = B_2 \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} B_2 = -\frac{1}{2} B_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$B_{3x} = B_3 \cos 240^\circ = -\frac{1}{2} B_3 = -\frac{1}{2} B_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right),$$

Sečteme a upravíme pomocí goniometrických vzorců

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} =$$

$$B_m \left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cos \omega t \sin 120^\circ - \frac{1}{2} \sin \omega t \cos 240^\circ + \frac{1}{2} \cos \omega t \sin 240^\circ \right] =$$

$$\dots = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

Obdobně vyjádříme y složky vektorů $\vec{B}_1$ až $\vec{B}_3$:

$$B_{1y} = 0,$$

$$B_{2y} = B_2 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$B_{3y} = B_3 \sin 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} B_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} B_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right)$$

Sečtením y složek magnetické indukce obdržíme

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} =$$

$$B_m \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega t \cos 120^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \sin 120^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega t \cos 240^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \sin 240^\circ \right] =$$

$$\dots = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t.$$

Vektor výsledné magnetické indukce vyjádříme ve složkovém tvaru

$$\vec{B} = \vec{i}B_x + \vec{j}B_y = \frac{3}{2} B_m (\vec{i} \sin \omega t - \vec{j} \cos \omega t). \quad (4.58)$$

Výraz v závorce je jednotkový vektor, který rotuje s frekvencí ω .

Vektor magnetické indukce výsledného magnetického pole má velikost $\frac{3}{2} B_m$ a s časem mění směr – rotuje s ω .

Točivé magnetické pole – magnetické pole, jehož vektor $\vec{B}$ nemění s časem velikost, ale mění směr.

Asynchronní třífázové motory

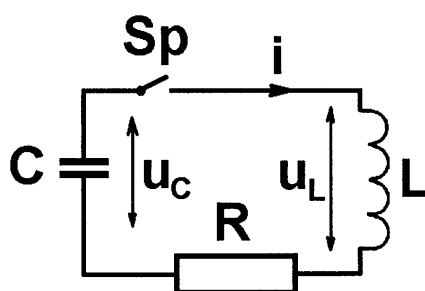
Kovový válec při rotaci v točivém magnetickém poli bude mít stejnou ω jako je úhlová rychlost točivého magnetického pole (pokud nebude překonávat žádné odpory).

Bude-li válec překonávat odpor a tím konat práci (při pohánění stroje), bude se otáčet menší rychlostí. V důsledku toho se bude v kovové válci rychleji měnit magnetický indukční tok, indukované proudy ve válci budou větší a zvětší proto i síla, která uvádí válec do rotace.

4. 6. ELEKTRICKÉ KMITY

1. Vlastní kmity oscilačního obvodu

Uvažujme obvod sestavený z R, L, C podle obr. 4.22.



Obr. 4.22.

- Nabijeme při rozpojení spínače S_p kondenzátor na napětí U_0 .
- V čase $t = 0$ sepneme spínač a necháme vybíjet kondenzátor přes cívku a rezistor.
- Kondenzátor je zdrojem elektromotorického napětí u_C , které vyvolá proud i (časově proměnný).
- Se vzrůstajícím proudem v obvodu vzroste i magnetický indukční tok v cívce, který vyvolá indukované elektromotorické napětí u_L .

$$u_C = \frac{Q}{C}, i = -\frac{dQ}{dt}, u_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Podle 2. Kirchhoffova zákona musí být celkové EMN rovno úbytku napětí na rezistoru

$$Ri = u_C + u_L$$

a po dosazení

$$Ri = \frac{Q}{C} - L \frac{di}{dt}. \quad (4.59)$$

Po derivaci a dosazení za $\frac{dQ}{dt} = -i$ můžeme rovnici přepsat

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Rovnici vydělíme L

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (4.60)$$

Zavedme označení

$$\frac{R}{L} = 2\delta, \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

a upravme rovnici na tvar

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (4.61)$$

Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice je kvadratickou rovnicí

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$D = \delta^2 - \omega_0^2$$

a její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{D}.$$

Řešení rovnice (4.61)

$$i = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t},$$

kde A_1 a A_2 jsou konstanty, které můžeme určit z počátečních podmínek.

Mohou nastat dva případy:

- $D \geq 0$, – kořeny kvadratické rovnice reálná čísla. Řešení rovnice vyjadřuje **aperiodický děj** v obvodu, kdy proud i nejprve vzroste do maxima a poté klesá k nule, aniž změní směr. (kondenzátor se vybije stejnosměrným proudem).
- $D < 0$, tj platí $\delta^2 < \omega_0^2$, – kořeny kvadratické rovnice jsou komplexní a řešení po úpravě vyjádříme

$$i = I_0 e^{-\delta t} \sin \omega t,$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

V obvodu vzniknou **tlumené kmity** s úhlovou frekvencí ω .

Amplituda těchto kmitů se s rostoucím časem exponenciálně zmenšuje

$$I_0 e^{-\delta t}.$$

δ – **koefficient tlumení**,

Oscilační obvod – obvod, ve kterém mohou vzniknout elektrické kmity.

Přeměna energie v kmitavém obvodu

Vybíjející kondenzátor vyvolá v obvodu proud $\Rightarrow$ magnetické pole v dutině cívky $\Rightarrow$ po vybití kondenzátoru magnetické pole zanikne $\Rightarrow$ vznikne indukované napětí u_L na cívce $\Rightarrow$ nabije kondenzátor (s opačnou polaritou) atd. se celý děj opakuje.

Energetické poměry v oscilačním obvodu

Rovnici (4.59) vynásobíme proudem i

$$Ri^2 = \frac{1}{C} Qi - Li \frac{di}{dt}.$$

Pro $i = -\frac{dQ}{dt}$ dostaneme

$$Ri^2 = -\frac{1}{C} Q \frac{dQ}{dt} - Li \frac{di}{dt}.$$

Dále rovnici upravíme

$$Ri^2 = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right).$$

Výrazy v závorkách jsou okamžité hodnoty energie kondenzátoru (W_e) a magnetického pole cívky (W_m) v oscilačním obvodu

$$Ri^2 = -\frac{d}{dt}(W_e + W_m)$$

nebo

$$Ri^2 dt = -d(W_e + W_m).$$

(4.62)

Výklad:

Přírůstek vnitřní energie rezistoru za dobu dt (Joulovo teplo v rezistoru) **je roven úbytku** celkové elektromagnetické energie oscilačního obvodu za dobu dt .

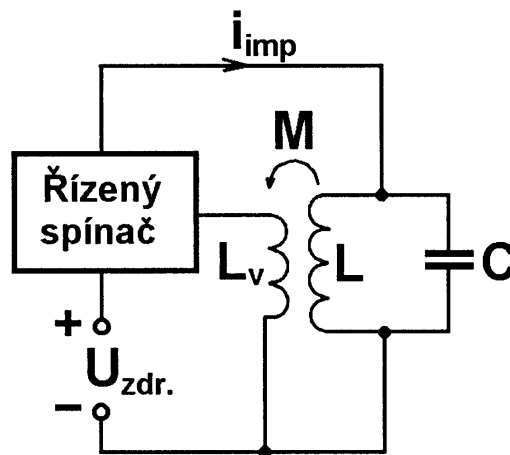
Vlivem úbytku energie rozptylem polí v okolí cívky a kondenzátoru klesá amplituda kmitů s časem – kmitů jsou tlumené.

2. Generátor tlumených oscilací

Ve vhodném okamžiku musíme do obvodu dodat energii (proud ze zdroje musí mít stejný směr jako proud cívkou při oscilacích obvodu)

Oscilátor – řízený spínač, např. tranzistor.

Princip je znázorněn na obr. 4.23.



Obr. 4.23.

Mějme cívku o indukčnosti L a paralelně zapojený kondenzátor o kapacitě C . (Odpor vinutí cívky zanedbáme).

Ztráty energie budeme nahrazovat z vnějšího zdroje U_{zdr} (stejnosměrný zdroj) připojený přes spínač do obvodu.

Zajištění správného okamžiku sepnutí

Cívka oscilačního obvodu o L je indukční vazbou vázána na vazební cívku L_v .

(Proud v cívce oscilačního obvodu vyvolá indukované napětí na cívce L_v a toto způsobí po krátkou dobu sepnutí řízeného spínače.)

Indukční zpětná vazba:

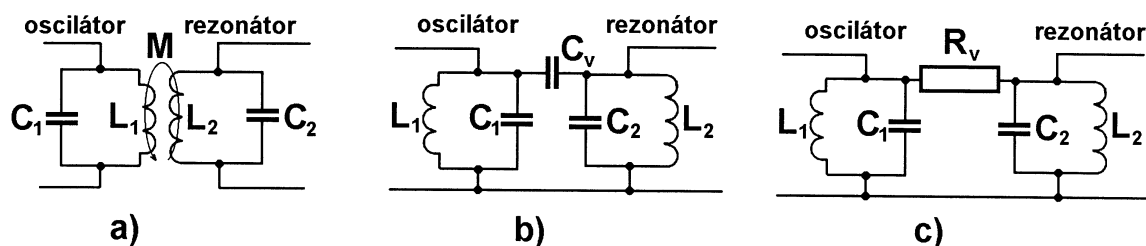
- **kladná** – případ netlumených oscilací,
- **záporná** – kmitů okamžitě zaniknou (vnější zdroj by dodal do obvodu proud v okamžiku, kdy je směr proudu v cívce obvodu opačný než proud zdroje).

3. Vázané oscilační obvody

Přenos energie z jednoho oscilačního obvodu na druhý pomocí elektromagnetické vazby mezi obvody.

Jeden obvod *oscilátor*

druhý obvod *rezonátor*



Obr. 4.24.

Tři základní druhy vazeb mezi oscilačními obvody (obr. 4.24).

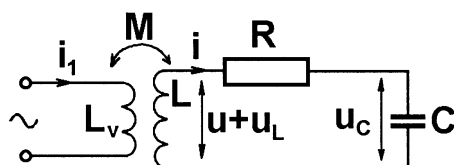
- **Indukční vazba** (obr. 4.24a) realizuje se prostřednictvím jejich magnetických polí (nenulová vzájemná indukčnost).
- **Kapacitní vazba** (obr. 4.24b) – realizace elektrickým polem vazebního kondenzátoru C_v .
- **Galvanická vazba** (obr. 4.24c) – uskutečňuje se rezistorem R_v .

Přenos energie z oscilátoru do rezonátoru je maximální za podmínky

$$\omega_{r1} = \omega_{r2}, \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (4.63)$$

Pásmová propust' – přenos určitého pásma kmitočtů v okolí obou rezonančních kmitočtů.

4. Vynucené kmity oscilačního obvodu



Obr. 4.25.

Do blízkosti cívky oscilačního obvodu umístíme druhou cívku (obr. 4.25), kterou necháme procházet proud i_1 o úhlové frekvenci Ω

$$i_1 = I_{m1} \cos \Omega t.$$

Při koeficientu vzájemné indukčnosti M je napětí indukované prostřednictvím indukční vazby

$$u = -M \frac{di_1}{dt} = -M (-I_{m1} \Omega) \sin \Omega t = U_m \sin \Omega t.$$

Při proudu i v oscilačním obvodu podle 2. Kirchhoffova zákona musí platit

$$Ri = u_L + u_C + u.$$

Po vyjádření napětí

$$Ri = -L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} + U_m \sin \Omega t .$$

Rovnici derivujeme podle času a dosadíme za $\frac{dQ}{dt} = -i$ a upravíme

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = U_m \Omega \cos \Omega t .$$

Rovnici vydělíme $L \Rightarrow$ nehomogenní diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{U_m \Omega}{L} \cos \Omega t .$$

Řešení této rovnice vyjadřuje vynucený proud i v oscilačním obvodu.

Pro amplitudu I_m po vyřešení a úpravě dostaneme

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega} \right)^2}} . \quad (4.64)$$

Výraz ve jmenovateli je impedance Z oscilačního obvodu při frekvenci Ω .

Bude-li se Ω vynucujícího proudu i spojitě měnit, pak při jisté hodnotě $\Omega = \Omega_r$ bude

impedance v obvodu nejmenší a amplituda bude maximální $I_{m \max} = \frac{U_m}{R}$ (**rezonance**)

při rezonanční frekvenci $\Omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (4.65)$

Rezonanční obvody – oscilační obvody u nichž dochází k rezonanci s vynucujícím signálem

Rezonanční křivka – grafické vyjádření závislosti I_m na Ω .

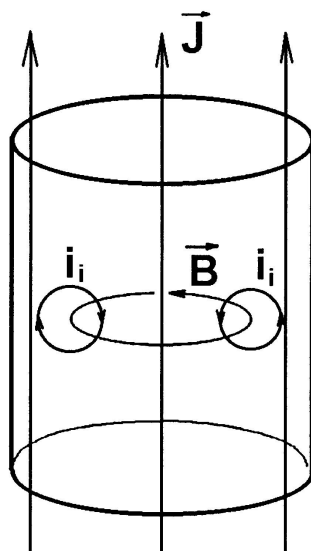
4. 7. NESTACIONÁRNÍ ELEKTROMAGNETICKÉ POLE

1. Vysokofrekvenční proudy a napětí

Budeme-li v oscilačním obvodu generátoru zmenšovat L a kapacitu C , můžeme získat napětí a proudy velmi vysokých frekvencí (až 100 mHz).

Povrchový jev – při vedení ωf proudu se projevuje **skinefekt**.

V případě ωf proudů je největší hustota proudu na povrchu vodiče a nejmenší uprostřed. S tím



souvisí i značné zvětšení odporu vodiče pro proud vysoké frekvence, neboť pro vedení je využita jen povrchová vrstva vodiče (pokrytí povrchu vodičů vrstvou stříbra nebo skládání z tenkých izolovaných drátů).

Vysvětlení: (Obr. 4.26) – Část vodiče s $\vec{v}$ proudem:

- proudové čáry jsou rovnoběžné s povrchem vodiče,
- každá je obklopena magnetickými indukčními čarami (některé procházejí vnitřkem vodiče).
- Uvnitř vodiče existuje střídavý magnetický indukční tok, (mění-li se směr proudu ve vodiči, mění se i směr magnetického pole tímto proudem vyvolaného),
- to způsobuje, že se ve vodiči indukují kolem magnetických indukčních čar proudy i_i ,
- směr proudů je na povrchu souhlasný se směrem proudových čar $\Rightarrow$ vzroste $\vec{J}$.
- Proudové čáry kolem osy vodiče mají opačný směr než $i_i \Rightarrow$ celková hustota proudu se uvnitř vodiče zmenší.

2. Rovnice kontinuity (spojitosti) proudu pro nestacionární elektromagnetické pole

Ve stacionárním elektrickém poli musí být proudové čáry uzavřené křivky

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0 \quad \text{nebo diferenciální tvar} \quad \text{div} \vec{J} = 0.$$

V obvodech střídavého proudu prochází proud přes kondenzátor (s nevodivým dielektrikem). Obklopíme-li jednu elektrodu nabitého kondenzátoru uzavřenou plochou S , pak při vybíjení kondenzátoru prochází obvodem proud i způsobený úbytkem náboje $-dQ$ na elektrodě kondenzátoru za dobu dt

$$i = -\frac{dQ}{dt}.$$

Vyjádříme proud i plochou S pomocí $\vec{J}$, dostaneme rovnici kontinuity v integrálním tvaru pro nestacionární pole

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (4.66)$$

Celkový náboj Q uvnitř uzavřené plochy S vyjádříme pomocí hustoty náboje ρ a integrál na levé straně pomocí $\text{div} \vec{J}$

$$\int_V \text{div} \vec{J} \cdot dV = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Porovnáním integrandů dostaneme **rovnici kontinuity proudu pro nestacionární případ** v diferenciálním tvaru

$$\text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.67)$$

a) Maxwellovy rovnice pro kvazistacionární elektromagnetické pole

a) Integrální tvar Maxwellových rovnic

1. **Gaussova zobecněná věta** pro tok vektoru elektrické indukce $\vec{D}$ uzavřenou plochou (platí i pro okamžité hodnoty příslušných veličin v nestacionárním poli)

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (4.68)$$

Tok vektoru $\vec{D}$ uzavřenou plochou S je roven celkovému volnému náboji uvnitř této plochy.

2. Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Časová změna magnetického pole vyvolává pole elektrické

$$U_i = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (4.69)$$

3. Uzavřenost magnetických indukčních čar

Tok vektoru $\vec{B}$ uzavřenou plochou S je vždy roven nule

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.70)$$

4. Ampérův zákon celkového proudu (byl odvozen pro stacionární pole, platí i pro pole kvazistacionární).

Cirkulace $\vec{B}$ po uzavřené dráze l je rovna $\mu_0\mu_r$ – násobku celkového proudu přes plochu S ohraničenou křivkou l .

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\mu_r \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (4.71)$$

b) Diferenciální tvar Maxwellových rovnic

Použitím Gaussovy a Stokesovy věty z vektorové analýzy

$$1. \text{ Gaussova věta } \operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (4.72)$$

2. Faradayův zákon elektromagnetické indukce

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.73)$$

3. Uzavřenost magnetických indukčních čar

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4.74)$$

4. Ampérův zákon celkového proudu

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{J}. \quad (4.75)$$

Lze upravit na tvar $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}.$

4. Maxwellovy rovnice pro nestacionární elektromagnetické pole

Z Maxwellových rovnic pro stacionární magnetické pole lze použít všechny rovnice v diferenciálním a integrálním tvaru kromě Ampérova zákona celkového proudu (má platnost pro stacionární i pro kvazistacionární elektromagnetické pole).

Pro nestacionární pole neplatí – je v rozporu s rovnicí kontinuity.

Rovnice kontinuity pro nestacionární pole

$$\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Rozpor:

Ampérův zákon v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{J}.$$

Po aplikaci divergence

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}}_{=0} = \mu_0\mu_r \underbrace{\operatorname{div} \vec{J}}_{\neq 0},$$

Musíme proto na pravé straně dosadit místo vektoru $\vec{J}$ takový vektor, jehož divergence je rovna nule.

Ten určíme z Gaussovy věty

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

kterou parciálně zderivujeme podle času

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

a dosadíme do rovnice kontinuity. Dostaneme

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Úprava rovnice na tvar

$$\operatorname{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.76)$$

Divergence vektoru v závorce je rovna nule a tento vektor dosadíme do Ampérova zákona místo hustoty vodivého proudu $\vec{J}$.

Rovnice vyhovující pro nestacionární elektromagnetické pole

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \quad (4.77)$$

Veličinu

$$\vec{J}_M = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.78)$$

nazýváme ***hustota Maxwellova proudu*** (má nenulovou hodnotu jen v dielektriku nebo ve vakuu).

Vektor $\vec{D}$ lze vyjádřit pomocí vektoru $\vec{E}$ a $\vec{P}$ vztahem

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

potom hustota Maxwellova proudu $\vec{J}_M$ má dvě složky

$$\vec{J}_M = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (4.79)$$

Výraz $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ představuje hustotu proudu způsobenou pohybem vázaných polarizačních nábojů při časové změně polarizace dielektrika – ***hustota posuvného proudu***.

!! Člen $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ existuje i ve vakuu a není vázán na pohyb elektrických nábojů

Maxwellův proud má rovněž magnetické účinky

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \int_S \left(\vec{J} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\vec{J}_M} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (4.80)$$

Vydělením $\mu_0 \mu_r$ lze rovnici upravit na tvar

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (4.81)$$

nebo v diferenciálním tvaru

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.82)$$

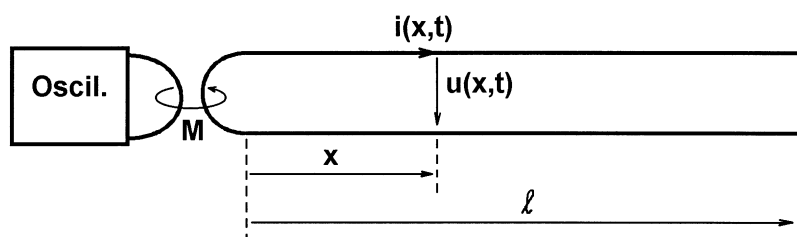
5. Obvody s rozloženými parametry

Obvody s prvky R, L, C – *obvody se soustředěnými parametry* (pole se šíří do okolí málo).

Obvody s rozloženými parametry jsou tvořeny vodiči s jednoduchou geometrií (dvouvodičové vedení, koaxiální vedení – koaxiální kabel)

Dvouvodičové vedení (obr. 4.27) – R, L, C jsou spojitě rozloženy podél vedení.

Charakteristické parametry vedení – hodnoty R, L, C jsou vztaženy na jednotku vedení (1m) – označení R_l, L_l, C_l ,

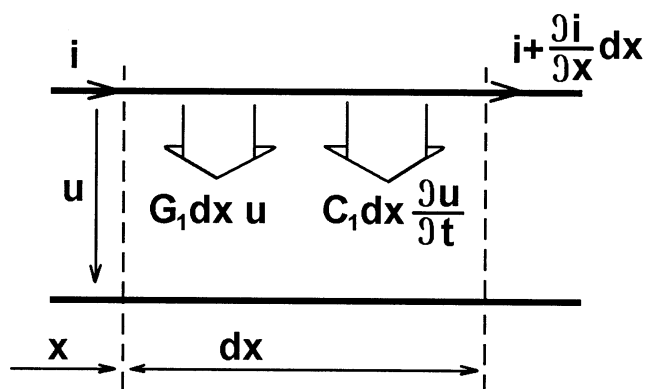


Obr. 4.27.

Vodivost prostředí vztaženou rovněž na jednotku vedení označíme G_1 .

Indukční nebo kapacitní vazbou vybudíme ve vedení elektrické kmity (elektrické pole bude úměrné U , magnetické I).

- Při malých frekvencích oscilátoru a malé délce vedení l předpokládáme stejné okamžité hodnoty u a i .
- U ωf oscilátoru bude $u(x, t)$ a $i(x, t)$ záviset nejen na t , ale i na místě vedení.



Obr. 4.28.

Hodnoty pro element dx ve vzdálenosti x od začátku vedení (obr.4.28) tedy vyjádříme jako

$$R_l dx, L_l dx, C_l dx, G_l dx$$

V místě x jsou okamžité hodnoty napětí a proudu rovny $u(x, t)$ a $i(x, t)$ (pro jednoduchost (x, t) vynecháváme).

- vodivostní proud $i_G = G_1 dx u$ (při napětí u),
- náboj na kapacitě $C_1 dx$ při napětí u je $Q = C_1 dx u$,
- proud kapacitou při časové změně napětí $i_C = \frac{dQ}{dt} = C_1 dx \frac{\partial u}{\partial t}$.

Proud v místě $x + dx$ má hodnotu

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Podle 1. Kirchhoffova zákona proud přitékající do úseku vedení se musí rovnat součtu proudů odtékajících

$$i = i_G + i_C + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

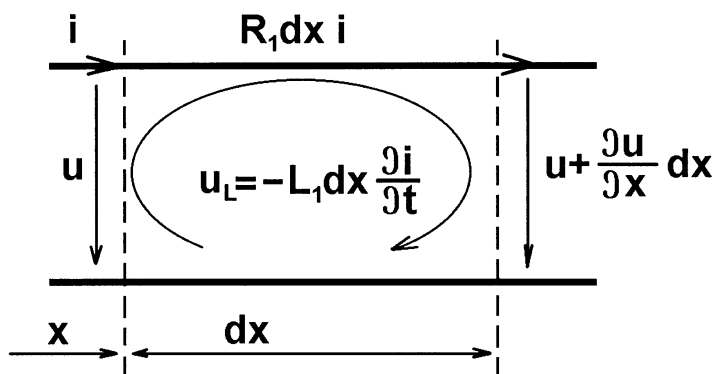
Po dosazení

$$i = G_1 dx u + C_1 dx \frac{\partial u}{\partial t} + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Odtud po vydělení výrazem dx a úpravě

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_1 u + C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.83)$$

Podle 2. Kirchhoffova zákona (stejný úsek vedení, viz obr.4.29)



Obr. 4.29.

Časová změna magnetického indukčního toku (kolem vodičů existuje magnetické pole) indukuje ve vodičích napětí

$$u_L = -L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Úbytek napětí na odporu úseku vedení je

$$-u + R_1 dx i + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = -L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Odtud po vydělení a úpravě

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (4.84)$$

Budeme-li rovnici (4.83) parciálně derivovat podle času a rovnici (4.84) podle x ,
Beztrátové vedení – zanedbatelné R_l , G_l mezi vodiči

Telegrafní rovnice pro beztrátové vedení

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\quad (4.85)$$

Pro beztrátové vedení mají telegrafní rovnice tvar vlnové rovnice $\Rightarrow$ napětí u a proud i se šíří podél vedení ve formě vln.

Vlna napětí i vlna proudu se šíří po dvoudrátovém vedení rychlostí

$$\frac{1}{v^2} = L_1 C_1 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (4.86)$$

Rychlost šíření těchto vln je rovna rychlosti světla ve vakuu c .

Délka vlny na vedení je

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

kde f je frekvence oscilátoru.

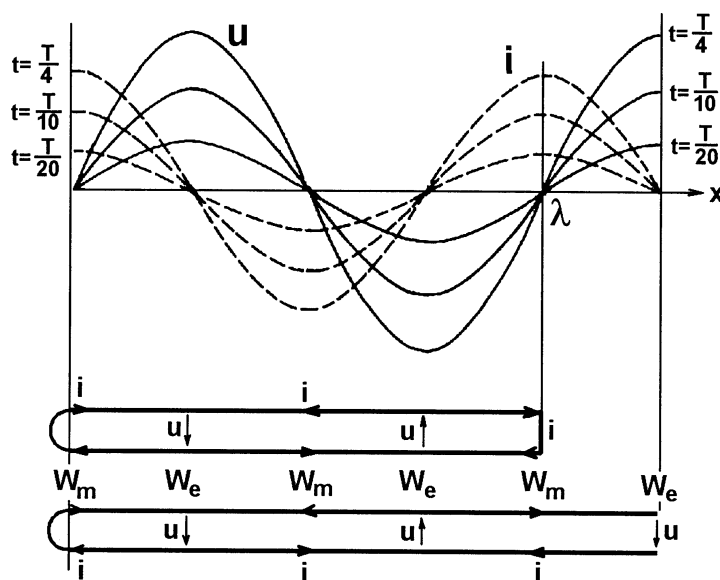
Děje na vedení v závislosti na tvaru zakončení

Při vhodném zakončení se vlna na konci může odrazet a šířit zpět ke zdroji.

Superpozicí s přímou vlnou vznikne **stojaté vlnění** (uzly nebo kmitny u , i)

V místě vazební smyčky s oscilátorem je **uzel napětí** a **kmitna proudu**.

Podmínky pro vyladěné vedení (obr.4.30)



Obr. 4.30.

- **Vedení s volným koncem** (zakončené naprázdno – nekonečnou impedancí) – na konci **kmitna napětí** a **uzel proudu**.

Pro délku l vedení

$$l = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}, k = 1, 2, \dots \quad (4.87)$$

- **Zkratované vedení** (nulová impedance) – na konci *kmitna proudu* a *uzel napětí*.

Pro délku vedení

$$l = k \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, \dots \quad (4.88)$$

V kmitnách napětí je největší energie W_e ,

V kmitnách proudu je největší energie W_m .

Každé vedení má určitou **vlnovou impedanci** $\hat{Z}_v$.

Pro bezztrátové vedení je čistě reálná – **vlnový odpor** R_v , tedy $\hat{Z}_v = Z_v = R_v$.

$$R_v = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{L_{zk}}{C_{napr}}} \quad (4.89)$$

Zakončení vedení impedancí $\hat{Z}_2$, která je rovna impedanci vedení $\hat{Z}_v$ (nebo R_v), pak činitel odrazu na konci vedení je roven 0 $\Rightarrow$ na vedení existuje jen *postupná vlna* šířící se od zdroje signálu k impedanci $\hat{Z}_2$ na konci vedení (celá energie postupné vlny se spotřebuje v impedanci $\hat{Z}_2$).

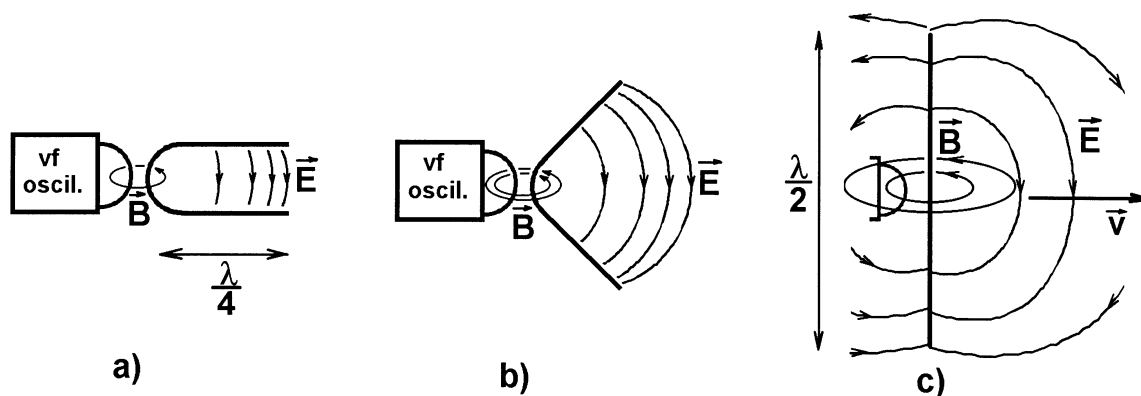
Přízpůsobení zátěže a vedení – pro případ přenosu signálu od zdroje ke spotřebiči (např. od TV antény k TV přístroji).

Dříve – dvojlinka s vlnovým odporem $R_v = 300 \Omega$,

yní – koaxiální kabel s vlnovým odporem $R_v = 75 \Omega$.

6. Obvody s otevřenými parametry

U dvouvodičového vedení je elektrické i magnetické pole rozloženo podél vedení (převážně



Obr. 4.31.

však mezi vodiči a v blízkém okolí.

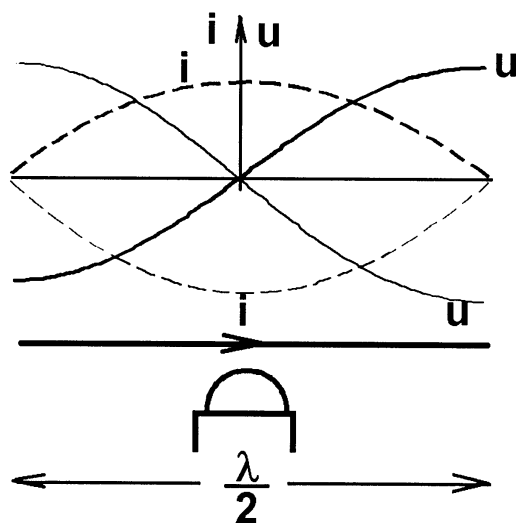
Nejkratší délka l_{min} vyladěného dvouvodičového vedení (obr. 4.31a)

$$l_{min} = \frac{\lambda}{4},$$

Obvod s otevřenými parametry – chceme-li, aby se elektrické a magnetické pole šířilo do okolního prostoru

realizace – vodiče vyladěného dvouvodičového vedení rozevřeme na přímý vodič $\lambda/2 \Rightarrow$ **půlvlnný dipól**. (obr. 4.31b,c)

Pole půlvlnného dipólu se šíří do okolí rychlostí $\vec{v}$ ve *formě elektromagnetických vln*. Rozložení napětí a proudu na oscilujícím půlvlnném dipólu je na obr. 4.32.



Obr. 4.32.

- Uprostřed dipólu je kmitná proud (buzení vazbou oscilátoru),
- napětí má uzel uprostřed dipólu a na koncích jsou kmitny napětí.

Kmitny napětí se dějí tak, že jeden konec dipólu je kladný a druhý záporný a obráceně.

Použití:

Ve sdělovací technice (antény, vysílače).

Při dopadu elektromagnetických vln o vlnové délce λ na půlvlnný dipól délky $\lambda/2$ pracuje dipól jako rezonátor a rozkmitá se s kmitou odpovídající frekvence – anténa přijímače elektromagnetických vln.

7. Řešení Maxwellových rovnic pro homogenní izotropní dielektrikum

Při řešení vyjdeme z Maxwellových rovnic v diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

V dielektriku $\rho = 0$, tedy $\vec{J} = 0$.

Pro homogenní, izotropní dielektrikum lze využít "materiálových vztahů"

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}.$$

Pro homogenní, izotropní dielektrikum po úpravě dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Abychom vyjádřili rovnici pro $\vec{E}$ aplikujeme na 1. rovnici operátor rotace a 2. rovnici parciálně derivujeme podle času

$$\begin{aligned} \text{rot} \text{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \mu_r \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Za výraz obsahující $\vec{H}$ na pravé straně dosadíme výraz z druhé rovnice

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Avšak

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \underbrace{\text{div} \vec{E}}_0 - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E},$$

kde Δ je Laplaceův operátor. Tak dostaneme **rovnici pro vektor elektrické intenzity**

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.90)$$

Obdobným postupem dostaneme **rovnici pro vektor magnetické intenzity**

$$\Delta \vec{H} - \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.91)$$

Rovnice (4.90) a (4.91) jsou **vlnové rovnice** popisující šíření vektoru $\vec{E}$ a $\vec{H}$ ve formě elektromagnetické vlny v dielektriku.

Elektrická i magnetická intenzita se šíří stejnou rychlostí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}. \quad (4.92)$$

Ve vakuu $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$, takže

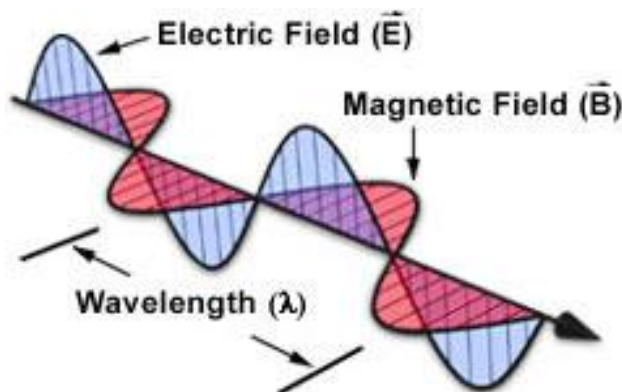
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1} \quad (4.93)$$

Rychlost šíření elektromagnetické vlny v dielektriku ($\epsilon_r > 1$) je menší než rychlost šíření ve vakuu, tj. $v < c$.

Podíl rychlosti šíření vlny ve vakuu a dielektriku je tzv. **absolutní index lomu** dielektrika

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (4.94)$$

VLASTNOSTI ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN



a) Elektromagnetické vlnění je **vlnění příčné**. Vektory $\vec{E}$ a $\vec{H}$ jsou kolmé na směr šíření vlnění (kolmé k $\vec{v}$) a jsou vzájemně kolmé.

b) **Spektrum elektromagnetických vln**

Tabulka 2: Rozdělení elektromagnetických vln

Interval	frekvence	vlnové délky
radiové vlny: velmi dlouhé	3 – 30 kHz	$(10^5 - 10^4)$ m
nízké frekvence	30 – 300 kHz	$(10^4 - 10^3)$ m
střední frekvence	0,3 – 3 MHz	$(10^3 - 10^2)$ m
vysoké frekvence	3 – 30 MHz	$(10^2 - 10)$ m
velmi vysoké frekvence	30 – 300 MHz	$(10 - 1)$ m
mikrovlny :decimetrové	0,3 – 3 GHz	$(1 - 0,1)$ m
centimetrové	3 – 30 GHz	$(10 - 1)$ cm
milimetrové	30 – 300 GHz	$(10 - 1)$ mm
submilimetrové	> 300 GHz	< 1 mm
daleká infračervená oblast	$10^{11} - 10^{13}$ Hz	$(10^3 - 20)$ μ m
infračervené záření	$10^{13} - 4 \cdot 10^{14}$ Hz	$(20 - 0,75)$ μ m
viditelné světlo	$4 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$ Hz	$(750 - 400)$ nm
ultrafialové záření	$7,5 \cdot 10^{14} - 6 \cdot 10^{16}$ Hz	$(400 - 50)$ nm
rentgenové záření: měkké	$10^{16} - 10^{18}$ Hz	$(20 - 0,1)$ nm
tvrdé	$10^{18} - 10^{22}$ Hz	$(0,1 - 10^{-5})$ nm
γ záření	> 10^{18} Hz	< 0,1 nm

Pro rozhlasové vysílání se užívají frekvenční pásma

- DV – $f = 145$ kHz až 420 kHz,
- SV – $f = 510$ kHz až 1,6 MHz,
- KV – $f = 3$ MHz až 30 MHz,
- VKV – $f = 30$ MHz až 300 MHz,
- UKV – $f = 300$ MHz až 3 GHz.

Elektromagnetické vlny od oblasti daleké infračervené oblasti již nelze generovat uměle vyrobenými oscilátory.

Jsou generovány přirozenými oscilátory – atomy, molekuly.

Kvantové vlastnosti elektromagnetického záření – není vyzařováno spojitě, ale po kvantech o energii

$$W = hf = h \frac{c}{\lambda},$$

kde h je Planckova konstanta.

c) **Šíření elektromagnetických vln v prostoru**

- Snadno procházejí nevodivým prostředím i vakuem, na vodivém prostředí se odráží,
- velká rychlost šíření je vhodná pro přenos informace,

Dlouhé a střední vlny jsou obvykle vyzařovány svislými čtvrtvlnovými dipóly – šíří se při povrchu Země (ohýbají se na překážkách, není nutná přímá viditelnost mezi vysílačem a přijímačem).

Krátké vlny – je možné je přijímat jen v oblasti přímé viditelnosti antény vysílače,

dálkový příjem KV je umožněn odrazem od ionosféry (výška 100 až 120 km – vrstva E), která vzniká ionizací vzduchu působením slunečního záření. V noci vrstva zaniká rekombinací iontů.

V noci je šíření možné odrazem od ionizované vrstvy F (200 až 400 km) – spojení na delší vzdálenost.

Radiové vlny velmi vysoké frekvence ($\lambda = 10$ až 1 m) procházejí ionosférou a pronikají do kosmického prostoru.

Příjem je možný jen v dosahu přímé viditelnosti, umožňují spojení s umělými družicemi Země a s objekty vypuštěnými do kosmického prostoru.